

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

www.joom.org.mx

Ciudad de México. México. No. 10. Enero-Junio 2024

OBJETOS MATEMÁTICOS

- **El Teorema sobre Retículas de Oystein Ore.**

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

- **Modelado matemático y diseño de un sistema de procesamiento de señales *EEG* para control de sistemas robóticos.**

Marcos Fajardo Rendón.

- **Estudio de la trayectoria de tres cuerpos celestes por medio de un modelado matemático con base en el sistema de evolutas.**

Jaime William Flores Tecalco.

- **Propuesta de Doce conjeturas sobre números primos.**

Fernando Gustavo Isa Massa.

- **Gm Sharp Prelude: A musical composition based on a mathematical aided - computer methodology.**

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Francisco Guillermo Herrera Armendia
Editor en Jefe.
herrera@joom.org.mx

Marcos Fajardo Rendón
Editor Ejecutivo.
fajardo@joom.org.mx
Isaac Villavicencio Gómez
Coordinador Editorial.
villavicencio@joom.org.mx

CONSEJO PERIODISTA

Areli Guadalupe Mateos Sánchez.

COMITÉ CIENTÍFICO

Caballero Mora Karen Salomé.

Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas

Guzmán Sánchez Sergio.

Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.

Isa Massa Fernando Gustavo.

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Tucumán. Argentina.

Juárez Contreras Socorro.

Instituto Politécnico Nacional. Dirección General.

Mendoza Pérez Armando Felipe.

Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.

Sentiés Nacaspac María de Jesús.

Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.

PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

Webmaster

Marcos Fajardo Rendón

JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS, No. 10, Enero-Junio 2024 es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, www.joom.org.mx ; revistajoom@gmail.com .

Editor responsable: Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-021112015700-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.

Responsable de la última actualización de este Número, Marcos Fajardo Rendón con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 1 de Abril de 2024.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Número 10.

Enero-Junio de 2024

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una revista semestral revisada por pares de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* número 10, enero-junio de 2024, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

Contenido

Carta del Editor	3
-------------------------	----------

OBJETOS MATEMÁTICOS

El Teorema sobre retículas de Oystein Ore.	12
<i>Oystein Ore's lattice theorem.</i>	
<i>Francisco Guillermo Herrera Armendia.</i>	

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

Modelado matemático y diseño de un sistema de procesamiento de señales EEG para control de sistemas robóticos.	15
<i>Mathematical modeling and design of an EEG signal processing system for control of robotic systems.</i>	
<i>Marcos Fajardo Rendón.</i>	

Estudio de la trayectoria de tres cuerpos celestes por medio de un modelado matemático con base en el sistema de evolutas.	26
<i>Study of the trajectory of three celestial bodies by means of mathematical modeling based on the evolutas system.</i>	
<i>Jaime William Flores Tecalco.</i>	

Propuesta de Doce conjeturas sobre números primos.	34
<i>Proposal for Twelve conjectures about prime numbers.</i>	
<i>Fernando Gustavo Isa Massa.</i>	

Gm Sharp Prelude: A musical composition based on a mathematical aided - computer methodology.	38
<i>Preludio en sol sostenido: Una composición musical basada en una metodología matemática asistida por computadora.</i>	
<i>Francisco Guillermo Herrera Armendia.</i>	

CARTA DEL EDITOR

En este número 10 del JOOM damos a conocer algunas publicaciones realizadas durante los años que tienen una secuencia calendárica con este 2024, además incluimos el discurso de inauguración del Congreso Internacional de Objetos y Objetivos en Matemáticas celebrado el pasado 14 de marzo. En el próximo número publicaremos la parte de este discurso relativa el Primer Simposium Internacional sobre el Problema de los Cuatro colores, así como los trabajos de investigación presentados durante la jornada del viernes 15 de marzo.

En 1957 Oystein Ore publica su libro titulado “Niels Henrik Abel. Un Matemático extraordinario” y editado por Chelsea Publishing Company en la ciudad de Nueva York, apareciendo en 1974 una segunda edición, ambos años con secuencia calendárica con este 2024 a partir del viernes 1 de marzo. Está dividido en cinco capítulos: 1) Familia y niñez, en el que Ore detalla el trabajo del padre de Abel, como tradición familiar al ocupar el puesto de Pastor. También incluye interesantes detalles del paso de Abel por la escuela catedralicia en la que se convierte en estudiante de un docente muy inspirador y motivador. Termina esta parte con detalles sobre la muerte de su padre y las consecuencias que esto trajo. 2) En la Universidad. Aquí detalla el autor los primeros años universitarios de Abel, su viaje a Copenhague importante ciudad de Dinamarca, y la obtención de su beca concedida por el gobierno danés. 3) Viaje al Continente. En este capítulo el autor detalla las vivencias del joven durante el invierno en la ciudad de Berlín, sus esperanzas de estabilidad truncadas, un viaje en compañía de Wilhelm Christian Keilhau quien llegaría a ser editor de textos; su viaje a Italia en primavera; los matemáticos de Paris y termina el capítulo con la narrativa de una espera melancólica. 4) El regreso. Aquí narra los acontecimientos que vivió Abel al regresar a su país, pues tendrá que enfrentar las cuestiones de prioridades, las esperanzas y las decepciones, pero también vivirá el nacimiento de su fama cercana al final de su vida. 5) Epílogo. La magistral narrativa de Ore nos hace reflexionar sobre la alabanza y la culpa que vivió y padeció Abel; en un subcapítulo titulado “En busca de un manuscrito”, Ore da cuenta de la influencia de Henrik Abel entre la comunidad matemática de la época. Él había enviado una memoria que contenía sus investigaciones en matemática a la Academia francesa. Jacobi leyó gran parte de esta obra y encontró notas a pie de página sobre las funciones hiperelípticas, por lo que con gran asombro le escribió una carta a Legendre un domingo 14 de marzo de 1829 en la que le exponía: ...”¡Qué gran descubrimiento del Señor Abel ha sido la generalización de la Integral de Euler!”. Además, Jacobi le hace notar la falta de atención por parte de los miembros de la Academia hacia este trabajo que para él era tal vez el más importante del siglo 19. Desde luego que Legendre respondió a esto, el miércoles 8 de abril de ese año, dos días después del fallecimiento de Henrik Abel acaecida el lunes 6 de ese mes. Grandes figuras de la matemática del siglo decimonónico se involucraron con el trabajo de Abel, como Poisson, Cauchy, Crelle, Fourier, Jacobi, Legendre. En un último subcapítulo Ore describe muy bien los momentos de genialidad de N. H. Abel. Es de todos conocida la influencia que tuvo Abel en el pensamiento matemático moderno por ejemplo, con sus ideas que desarrollaron el álgebra abstracata. Sin embargo hay una expresión numérica propuesta por Abel que evidencia su genialidad. En su localidad se inscribió en un grupo al que atendía un docente muy peculiar, pues tenía poca paciencia y solía golpear a sus estudiantes por cualquier motivo. En cierta ocasión un joven estudiante fue golpeado bruscamente por este docente, dejándole en el suelo y sin poderse mover. Las protestas de los padres no se hicieron esperar y lograron sustituir a este profesor con un docente que entonces era adjunto, se trataba

de Bernt Michael Holmboe quien tiene un papel sobresaliente en esta historia. Era un docente muy joven, con los ideales propios de principios de aquel siglo, influenciado por la libertad, la democracia, la razón, el idealismo, etc., por lo que pronto se convirtió en un auténtico líder del grupo. Además, solía motivar a sus estudiantes en los conocimientos para los que ellos eran más aptos. No tardó en descubrir la maravillosa inteligencia matemática de Henrik, así que le motivó para que profundizara en sus estudios. Holmboe es un gran ejemplo para todo aquel que quiera dedicarse a la docencia, especialmente de la matemática. Su amistad se mantuvo por mucho tiempo y con frecuencia se escribían cartas. En una de ellas, Abel le escribe, iniciando su redacción con estos datos:

Copenhague, $\sqrt[3]{6\ 064\ 321\ 219}$

Él escribe la fecha con precisión hasta de milésimas de segundo, si se quiere, y todo en sistema decimal. Como sabemos, las fechas se escriben tradicionalmente utilizando el sistema decimal para los años, nombres que indican el conjunto de días conocidos como meses, pero que pueden contener 28, 29, 30 o 31 días y el número que indica el día del mes correspondiente. Si queremos precisar más, podemos utilizar las fracciones del día, como las horas (24 por cada día); luego los minutos y después los segundos, ellos en sistema de numeración de base 60. Al seguir precisando el momento, podemos utilizar los décimos, centésimos o milésimos de segundo, escritos en base diez. Como se aprecia, es todo un conglomerado de sistemas de numeración que describen el momento que estamos viviendo. Su genialidad se manifiesta en escribir todo ello en un solo sistema de numeración, utilizando números enteros positivos a los que se les extrae la raíz cúbica (y se hacía a mano, no como hoy que fácilmente se conoce usando simples calculadoras electrónicas. Si estas hubiesen existido antes, es muy probable que la matemática no estuviese desarrollada como en la actualidad. Pero, la tecnología se desarrolla porque la ciencia es capaz de interpretar fenómenos naturales con el lenguaje matemático, así que esto es una paradoja). Pues bien, la fecha escrita convencionalmente corresponde al lunes 5 de agosto de 1823. Dejo al lector el cálculo e interpretación de la fecha. (Los números decimales se toman en cuenta). Otro buen ejercicio consiste en localizar los límites de las expresiones, pues no funciona para todas las fechas. Existe un mínimo año y uno máximo a partir del que su siguiente, ya no se puede expresar con este enunciado. Entonces, ¿cuál será la expresión aritmética que deba utilizarse? Son muchas las variaciones que se derivan de una genialidad de N. H. Abel, sólo una. Por ello su trabajo es monumental.

En 1968 la casa editorial Holt, Rinehart and Winston, Inc., publica el texto titulado “Introducción a la Teoría de las Álgebras Abstractas” escrito por Richard S. Pierce, obra en la que propone el estudio de las álgebras universales o modernas como una base para el estudio del lenguaje matemático actual y que pretendía profundizar las ideas publicadas por Cohn y luego por Grätzer. La obra está dedicada principalmente a estudiantes de posgrado en el área de matemática pura. Aborda temas interesantes como el estudio de álgebras parciales o sistemas relacionales; el Teorema del Álgebra Universal; la unicidad del Teorema de Oystein Ore; el Teorema de existencia para extensiones libres; estudio de las variedades (o las clases de ecuaciones de las álgebras) a través de la exposición del Teorema fundamental de Birkhoff sobre la caracterización de las variedades. Propone una interesante definición que permite entender la noción de álgebra abstracta: Def 1.- Sea A un conjunto, con la

hipótesis de que τ represente a un número ordinal. Entonces, existe una operación τ – *aria* parcial sobre el conjunto A y que es un mapeo parcial de A^τ hacia A . Expandiendo esta idea, tenemos: F representa una operación τ – *aria* parcial con la condición de que este conjunto F mapee al conjunto $D \subseteq A^\tau$ hacia A . Además si consideramos la igualdad $\mathcal{D}(F) = A^\tau$, entonces el conjunto F representa una operación τ – *aria* sobre el conjunto A . Tomando como base esta definición, el autor hila una serie de definiciones más que permiten abordar el concepto de Homomorfismo, estableciendo en el texto el convenio de que el conjunto de todos los homomorfismos entre dos conjuntos cualquiera, por ejemplo entre los conjuntos \mathbf{A} a \mathbf{B} , se denota por la expresión $\text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Con base en un lenguaje finamente estructurado, el autor aborda los conceptos de isomorfismo y epimorfismo necesarios para estudiar los teoremas relativos al álgebra abstracta. Plantea también la Teoría de Retículas o enrejados con base en 2 definiciones, 2 lemas con demostración, 3 proposiciones con demostración y un corolario: Sea que el conjunto \mathbf{A} represente un álgebra parcial finita. Entonces la expresión $\Theta(\mathbf{A})$ representa una retícula compactamente generada. Este corolario también es consecuencia directa de los enunciados anteriores. El autor incluye notas a cada capítulo del texto y hacen referencia a aspectos epistemológicos del objeto matemático estudiado y que permite comprender el concepto. Por ejemplo, la nota del capítulo 3, dedicado a Descomposiciones Directas, menciona que el Teorema de Oystein Ore se publica por primera vez en su artículo titulado “Sobre los fundamentos del Álgebra Abstracta” y aparece en *Annals of Math.* No. 36, (406-437) en 1935 y No. 37 (265-292) en 1936. Su trabajo también aplica el Teorema al problema de la unicidad para las descomposiciones de álgebras abstractas [Ore fallece en 1968, fecha de publicación del texto. Nota de los editores]. Sin embargo, para casos particulares de álgebras se han utilizado otros métodos para el estudio de descomposiciones directas, como es el caso particular del Teorema Krull-Schmidt que justifica la unicidad para descomposiciones directas de ciertos grupos con operadores. Es así que Jónsson muestra que el Teorema de Ore no se transfiere a las retículas sin alguna condición de finitud en su artículo titulado “Sobre las descomposiciones directas de torsión libre de grupos abelianos” publicado en *Math. Scand.*, No.5 (230-235) en 1957. Otro interesante trabajo sobre las descomposiciones directas se debe a J. Hashimoto en su artículo denominado “Descomposiciones Directas y Subdirectas y las relaciones de congruencia” publicado en *Osaka Math. Journal* No. 9 (87-112) en 1957. Algunos de sus más interesantes resultados el autor del libro comentado los expone en los problemas 10-18. La investigación de Hashimoto es también la fuente de muchos de los resultados sobre la estructura de las retículas y que se exponen en los problemas 19-22 de la obra. Sin embargo, fue R. P. Dilworth quien inició el estudio de las retículas relativamente complementadas en su artículo denominado “La estructura de las retículas relativamente complementadas” publicado en *Annals of Math.* No.51 (348-359) en 1950. Las descomposiciones directas de álgebras abstractas y los sistemas relacionales también fueron investigados por B. Jónsson y A. Tarski en su artículo titulado “Las descomposiciones directas de sistemas algebraicos finitos” publicado por University of Notre Dame Press, Notre Dame, Ind. En 1947; por Crawley y B. Jónsson en “Tratamiento refinado para las descomposiciones directas infinitas de sistemas algebraicos” publicado en *Pac. Jour. Of Math.* No. 14 (797-855) en 1964; y más recientemente por C. C. Chang, B. Jónsson y A. Tarski en “Las propiedades del tratamiento refinado para las estructuras relacionales” publicado en *Fund. Math.* No. 55 (249-281) en 1964, utilizando una metodología que no es consecuencia de la Teoría de las Retículas.

En el número 237 correspondiente al mes de junio de 1996 de la añorada revista Investigación y Ciencia el profesor Yves Hellegouarch, entonces colaborador para la Universidad de Caen, Francia publicó un artículo titulado “Fermat, demostrado al fin”. En él describe la demostración del Teorema de Fermat propuesta por Andrew Wiles colaborador en aquella época de la Universidad de Princeton, basada en procesos matemáticos relacionados con la Teoría de Números. El conocido enunciado propuesto por Pierre de Fermat cuya forma general es: $x^n + y^n = z^n \mid n > 2$, es demostrado por Wiles junto con Richard Taylor quien era profesor de la Universidad de Cambridge y dado a conocer el lunes 19 de septiembre de 1994, después de mucho trabajo. En su artículo, el profesor Hellegouarch explica la gran utilidad de la generalización a dimensiones superiores como un excelente método de demostración propuesto por Desargues y relacionado con propiedades de algunas figuras representadas en el plano que se interpretan como sombras de figuras representadas en el espacio. De este modo es posible apreciar familias de curvas. Por ejemplo, cuando la expresión original de Fermat se escribe con el valor de 1 para la variable z , entonces se genera una ecuación cuyas curvas están incluidas en dos familias: una en la que n es número par y la segunda familia en la que n es número impar y a partir de estas ideas se va avanzando en el proceso de demostración que duró más de 300 años. En 1977 el matemático Gérard Terjanian verificó que si n es igual a $2p$, con p como número primo impar, consecuentemente uno de los tres números (x, y, z) que satisfacen la ecuación de Fermat para el exponente $2p$, será necesariamente cero, módulo $2p$. Esta contribución se conoce como el primer caso del Teorema de Fermat. Para 1985, los matemáticos Adleman, Fouvry y Heath-Brown trataron de optimizar definitivamente este primer caso, sin lograrlo, pero lo acertaron para una infinidad de exponentes primos. Estas ideas llevan necesariamente al uso de los números algebraicos, presentidos por Evaristo Galois y culminados con la propuesta de Félix Klein en su programa de Erlangen en 1872 y cuyo propósito es asignar a todo objeto matemático estructurado, un grupo de transformaciones de dicho objeto que conserven dicha estructura, es decir, el automorfismo del objeto matemático en cuestión. El investigador de apellido Kummer utilizó este método para estudiar la ecuación fermtiana de grado cinco incorporando el uso de algunos números ciclotómicos. Los conceptos de formas modulares y su relación con las curvas elípticas constituyen los avances logrados como consecuencia del proceso de demostración del Teorema de Fermat. Así, un grupo de automorfismos que son subconjunto de los números algebraicos se denomina grupo de Galois absoluto y que ha sido estudiado por Jean-Pierre Serre en los años setenta del siglo anterior. Hellegouarch ofrece un interesante cuadro en el que sintetiza las diferentes rutas seguidas para intentar demostrar el Teorema de Fermat: a) Ruta de los caminantes, utilizada por el propio Fermat para el exponente 4, después por Lamé y Lebesgue para el exponente 7; b) Formas cuadráticas, utilizada por Euler para $p = 3$ y luego por Legendre y Dirichlet para el caso de $p = 5$; c) Extensiones ciclotómicas utilizada mucho desde la época de De Moivre; d) Aproximación elíptica a partir de 1970 y es precisamente el tema del artículo publicado por Hellegouarch.



Discurso de inauguración.

Los organizadores del Congreso Internacional de Objetos y Objetivos en Matemáticas 2024 les damos la más cordial bienvenida. El escenario es magnífico e impresionante dadas las características de la maravillosa Biblioteca Vasconcelos, única en su género, con más de un millón de textos en su acervo y con innovado diseño arquitectónico, bello y funcional.

Agradecemos infinitamente el valioso apoyo de su director, Dr. José Mariano Leyva Pérez Gay, a la Maestra Aylin Escoto, al maestro Jorge Hernández y a todo su equipo quienes nos brindaron todas las facilidades para la organización y realización de este evento académico, así como también a nuestros ya casi colegas (docente en formación inicial) por su valiosa colaboración desinteresada. El desarrollo tecnológico relacionado con la información y la comunicación ha modificado paulatinamente la relación entre la opinión de los expertos y la opinión pública. Ya en los diarios impresos de fines del siglo 19 existían espacios para la opinión escrita con el propósito de motivar la lectura y la crítica reflexiva sobre el acontecer social; después, con la popularización del teléfono y la radio se generó una interacción más dinámica entre los comunicadores y el público escucha con el uso de estos dos desarrollos tecnológicos; para los años 50's ya se empieza a generalizar el uso de los televisores, y aunque la interacción directa entre los comunicadores o expertos en algún tema son menos frecuentes, la información y comunicación dio un nuevo giro; a partir del último tercio del siglo pasado y durante el presente, se produce un cambio insospechado, derivado del desarrollo tecnológico: la red internacional (internet) y los teléfonos móviles, derivado de la miniaturización de los componentes electrónicos, el acceso a la información y la comunicación a nivel global es prácticamente un juego de niños. Somos componentes activos de lo que Daniel Bell denominó "La Sociedad de la Información", y que requiere ser sistematizada y organizada de acuerdo con las ideas de Peter Drucker. Además, el adherirse a esta forma de interacción global se van generando consecuencias inevitables, según Manuel Castells, pues existe comunicación global en tiempo real, en espacios virtuales; es así que se

requieren personas preparadas para seleccionar , valorar y filtrar información, promover procesos de innovación, gestionar el conocimiento, impulsar el conocimiento en informática, telecomunicaciones y la transferencia de datos e imágenes y generar el acceso a la información a las organizaciones, instituciones, empresas y a todo el público en general. La matemática como el lenguaje insustituible de la ciencia y la tecnología, si bien es el promotor de los avances científicos y tecnológicos, no está ajena, como característica de la civilización actual, a estos cambios; este magnífico lenguaje ha contribuido en mucho al tránsito de la revolución industrial a la revolución científica, de la sociedad de la información a la sociedad del conocimiento. La coincidencia de ideas, metas, gustos, habilidades, recursos entre varias personas generó desde mediados del siglo 19 la conformación de Sociedades del conocimiento matemático. Ante todo esto, y sumándonos a las ideas de la Sociedad Bourbaki hemos conformado nuestra sociedad editora del Jornal de Objetos y Objetivos en Matemáticas (JOOM), cuyo propósito es precisamente promover la investigación de la matemática pura y aplicada de la forma más rigurosa posible, así como la divulgación ante la comunidad interesada de los productos obtenidos desde 2019. Con relación a la organización de eventos académicos como el presente, tenemos ya dos antecedentes: la organización del Primer Congreso Nacional de Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, celebrado en las instalaciones de la Escuela Normal Superior de México en octubre de 2016, con seis líneas de investigación, 1) Contenidos del pensamiento Matemático. 2) Perspectivas sociales, antropológicas y cognitivas de la didáctica de las matemáticas. 3) Experiencias en la docencia de las matemáticas y su reflexión. 4) Las TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. 5) Equidad, género e inclusión en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. 6) El Currículo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Organización del Primer Congreso Internacional de Investigación, Docencia y Formación Docente, celebrado en las Instalaciones de la Escuela Normal Superior de México en 2016, con trece líneas de investigación. Ambos eventos académicos fueron parte de los festejos del 80 aniversario de la fundación de la institución sede. A partir de marzo de 2023 se ha realizado el trabajo de organización para llevar a cabo el evento académico que hoy inicia entre las autoridades de la Biblioteca Vasconcelos y los organizadores y editores de JOOM. Se publicó la convocatoria para la recepción de reportes de investigación, parciales o concluidas. Se planificó el presente evento en dos partes: la primera, el Congreso Internacional de Objetos y Objetivos en matemáticas para el 14 de marzo que coincide con el 145 aniversario del natalicio de Albert Einstein en la ciudad de Ulm cerca de Stuttgart, en Alemania; la segunda, el Simposio Internacional de reflexiones y avances sobre el problema de los cuatro colores y la teoría de Grafos para el 15 de marzo. En el contexto actual del pensamiento matemático, el término objeto matemático ya posee su propio distintivo pues a partir de las ideas propuestas por Félix Klein, David Hilbert, Henri Poincaré, Guisepe Peano, Andrei Kolmogorov, Nicolás Bourbaki, Karol Borsuk, entre muchos importantes matemáticos y matemáticas con quienes me disculpo por no mencionar, pero dado el carácter de la presente plática me obliga a reducir tiempo, por ello retomo el término objeto matemático como un referente a abstracciones de alto nivel, producto del cambio de ideas, de la adaptación de conceptos anteriores al pensamiento actual, de la incorporación de simbología específica que permite describir relaciones entre estos objetos, desarrollando así el lenguaje matemático a

un nivel siguiente. Muchos de estos objetos no trascenderán en el tiempo, otros muchos sí, pero lo importante es su contribución para la comunicación a nivel matemático. Por otra parte, los objetivos matemáticos se enfocan en el uso del lenguaje matemático para la explicación más exacta posible de los fenómenos físicos, químicos, biológicos e inclusive sociales que nos rodean. Podemos percibirlos de forma natural, razonar sobre nuestra percepción, interpretar estos razonamientos y emitir conjeturas que al probarse enuncian teorías. El análisis cuantitativo de los fenómenos permite obtener cierta seguridad en la manipulación controlada de las condiciones que generan un fenómeno y sus posibles consecuencias. En la actualidad, los objetivos matemáticos van más allá de su papel utilitario, como herramientas abstractas y con la incorporación de la tecnología digital funcionan más bien como un consejero científico abstracto.

La siguiente descripción de los trabajos de investigación presentados la realizo bajo una perspectiva general del tema expuesto por cada investigador con el propósito de que se tenga una idea general a manera de introducción y que se complementa con la comunicación oral y escrita realizada por cada participante.

El día de hoy se presenta un interesante resultado de investigación relacionado con el procesamiento de señales EEG, un sistema robótico y el modelo matemático que permite explicar los fenómenos observados. De forma general existen modelos de recuperación (modelo Markin-Chizmadzhev), análisis-espacio del modelo FitzHugh-Nagumo), entre muchos otros, y donde las expresiones matemáticas son sumamente importantes:

$$\frac{1}{rc} \frac{\partial V^2}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{Jmc(x,t)}{c}$$

Que describe la corriente iónica de la membrana, pero no en función de la variable dependiente de voltaje, sino como una función de tiempo cuyos parámetros se obtienen con base en la denominada ecuación de difusión inhomogénea lineal por partes. La ecuación FitzHugh-Nagumo (F-N):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial t} = f(V) + RG$$

EL siguiente reporte de investigación incluye el objeto matemático denominado grafo, que se desarrolló mucho a partir del primer tercio del siglo pasado. Definido éste como un par ordenado vértice o borde y arista o arco $G(E, n)$; posee características relacionadas con el número de vértices, nodos (grado o valencia); y de éstas surgen las propiedades básicas de ellos. Derivados de las diversas propuestas de solución al problema del coloreo de mapas y después al problema de los cuatro colores, son muy utilizados en diferentes ramas del conocimiento, como en Ingeniería Química, Ingeniería Industrial, Ciencias de la Computación. Dependiendo de su uso, son inherentes a los espacios topológicos o a la teoría de la enumeración (combinatoria). De hecho, los intentos para resolver el problema de coloreo de mapas o coloreo de regiones generaron propuestas con base en las geometrías no euclidianas, aquellas con curvatura, denominadas riemanniana y conformal. Sin embargo,

para simplificar los resultados de las propuestas, se propuso modelar los resultados parciales en el plano sin curvatura, derivando así en la Teoría de Grafos. El fraude financiero ocurre cuando una persona es privada del acceso a su dinero, capital o daña su salud financiera por medio de prácticas engañosas, confusas u otras prácticas ilegales. Esto se puede hacer a través de una variedad de métodos como robo de identidad o fraude de inversión. El aporte de las técnicas derivadas a partir del uso de la tecnología digital son una buena herramienta para el estudio y solución de este problema. Este artículo será publicado en otro número del JOOM.

El siguiente reporte se relaciona con uno de los subconjuntos numéricos más interesantes del conjunto de los números enteros positivos \mathbb{N} , el conjunto de los números primos. Una expresión que expresa un número primo es la propuesta por Jean Dieudonné: $4n \pm 1 \vee 6n \pm 1 \mid n \in \mathbb{N}$ y es solo una de muchas otras formas de expresión de tales números. Se han escrito gran cantidad de libros que describen enigmas maravillosos de estos objetos matemáticos, como el magnífico libro de Marcus de Sautoy titulado “La música de los números primos. El enigma de un problema matemático abierto”. Este conjunto numérico es motivador, enigmático y que invita a explorar sus relaciones y en muchas ocasiones es hipnótico:

Sea P un número primo menor que 67.

Sea P_n la posición ordenada de P .

$$\frac{P_7 \sum_{P_n=7}^{10} P}{\prod_{P_n=1}^2 P + \sum_{P_n=5}^{10} P} + P_4 + e^{-0.0731} + \varepsilon \cong 2^\xi - 1.$$

$$\varepsilon = 0.000069586.$$

Sea ξ el primer número perfecto.

$\Phi \varepsilon \text{ L i C i } \delta \mathbb{N} \delta \varepsilon \sigma!$

Por otro lado, el estudio de la probabilidad también ha cobrado mucho entusiasmo durante el siglo pasado. La incertidumbre es un concepto que difícilmente acepta el ser humano. Por naturaleza, no deseamos convivir con el azar, y sin embargo es inherente a nuestras vidas todo el tiempo. Su estudio se origina con los juegos precisamente llamados de azar, con el propósito de garantizar en éxito de quienes lo practican. Se tienen registros de su uso en las culturas babilónica, egipcia, mesopotámica, griega y romana. Pero es hasta hace unos 500 años cuando Luca Paccioli empieza a realizar ensayos interesantes que incluyen análisis detallado de las probabilidades en los juegos de azar. Se interesaron también Fermat, Pascal, Laplace, De Moivre, Mozart (quien combinó maravillosamente esta rama del conocimiento con su talento para componer) aunque también hubo otros compositores más; sin embargo fue hasta 1933 que Kolmogorov le da un carácter formal al axiomatizar las condiciones necesarias y suficientes para modelar fenómenos azarosos. La combinación de estos dos objetos matemáticos es expuesta en esta investigación.

El siguiente trabajo de esa jornada se relaciona con trayectorias de tres cuerpos celestes. Siempre nos ha cautivado mirar los cuerpos celestes que están a nuestro alcance visual, ya sea o no con la ayuda de telescopios. Su observación ha permitido el desarrollo de

la tecnología de la cuenta del tiempo, llamada calendarios, que describen la periodicidad de las trayectorias de estos objetos celestes. La trayectoria de la Luna alrededor de la Tierra, de la Tierra alrededor del Sol, la trayectoria aparente de los planetas internos y externos vistos desde la Tierra y que con el paso del tiempo ha atraído a las mentes más brillantes como Tolomeo, Copérnico, Hipatia de Alejandría, Newton, Laplace, Einstein y muchos, muchos más. Como consecuencia de observar el firmamento se descubrieron los cometas y también se analizó su periodicidad. Todo ello redujo el concepto de creencias banales relacionadas con el tránsito de estos objetos celestes, además de predecir las trayectorias de muchos de ellos. Otra consecuencia son las observaciones de los eclipses de Sol y de Luna y que por ejemplo en el México de hace 300 años generó una gran polémica científica por un lado y trivial y superficial por el otro, entre Carlos de Sigüenza y Góngora versus Eusebio Kino y que quedó bellamente narrada en el texto “Libra Astronómica” escrita por Carlos de Sigüenza y Góngora. Por ejemplo, el cometa Heley está actualmente en el afelio de su órbita alrededor del Sol, a unos 8,000 millones de kilómetros del Sol este 2024 (su órbita completa tarda 76 años y estuvo en el periheio solar en 1986). Se localiza aproximadamente entre las órbitas de Neptuno y Plutón. Y hace exactamente 50 años, todos los aficionados a la astronomía estábamos maravillados por el paso del cometa Kohoutek (en honor a su descubridor, el astrónomo checo Lubos Kohoutek), que cobró mucha expectativa debido a los medios de comunicación. Es así que este reporte de investigación es de mucho interés para los aficionados a la astronomía.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Presidente

Congreso Internacional de Objetos y Objetivos Matemáticos 2024

Además, este número incluye dos contribuciones que no se presentaron en este Congreso. La primera se relaciona con el estudio del Teorema de Ore y que presenta de forma axiomática una propuesta de demostración a este Teorema. La segunda describe el vínculo entre la composición musical, el Anillo de Enteros y el uso de la tecnología digital como base para generar una secuencia melódica que permita crear un preludio.

Los editores.

El Teorema sobre Retículas de Oystein Ore.

Francisco Guillermo Herrera Armendia

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,
02420 CDMX, México.
harmendia@gmail.com

Resumen- Oystein Ore fue un eminente matemático noruego cuyo legado en la matemática moderna es muy influyente. Es muy conocido por sus investigaciones relacionadas con la Teoría de Grafos, la Teoría de números, el Problema de los Cuatro Colores y sus magníficos ensayos sobre personajes matemáticos históricos como Niels Henrik Abel y Gerolamo Cardano. Pero también profundizó en la Teoría de Retículas. Ya había incursionado en el estudio de los campos numéricos algebraicos generando interesantes resultados en el problema de la descomposición de ideales generados por números primos dentro de los números primos ideales. Otros temas abordados por él fueron la teoría de anillos conmutativos, probando el teorema de intercalado para el dominio de enteros no conmutativos dentro del anillo de la división; anillos polinomiales sobre campos no paralelos y la factorización de anillos no conmutativos. Sin embargo, presento en esta ocasión comentarios acerca del Teorema de Ore.

Palabras Clave- teorema de Ore, álgebra universal, retícula.

Zusammenfassung - Oystein Ore war ein bedeutender norwegischer Mathematiker, dessen Vermächtnis in der modernen Mathematik großen Einfluss hat. Er ist bekannt für seine Forschungen zur Graphentheorie, Zahlentheorie und dem Vierfarbenproblem sowie für seine großartigen Essays über historische mathematische Persönlichkeiten wie Niels Henrik Abel und Gerolamo Cardano. Er beschäftigte sich aber auch intensiv mit der Gittertheorie. Er hatte sich bereits an die Erforschung algebraischer Zahlenfelder gewagt und dabei interessante Ergebnisse zum Problem der Zerlegung von durch Primzahlen erzeugten Idealen innerhalb idealer Primzahlen erzielt. Weitere von ihm behandelte Themen waren die Theorie der kommutativen Ringe und der Beweis des Interkalationssatzes für den Bereich der nichtkommutativen ganzen Zahlen innerhalb des Divisionsrings; Polynomringe über nichtparallelen Körpern; Faktorisierung nichtkommutativer Ringe. Bei dieser Gelegenheit präsentiere ich jedoch Kommentare zum Satz von Ore.

Schlüsselwörter - Satz von Ore, universelle Algebra, Gitter..

резюме темы - Ойстейн Оре был выдающимся норвежским математиком, чье наследие в современной математике имеет большое влияние. Он хорошо известен своими исследованиями, связанными с теорией графов, теорией чисел, проблемой четырех цветов, а также своими великолепными эссе об исторических математических деятелях, таких как Нильс Хенрик Абель и Джероламо Кардано. Но он также углубился в теорию решеток. Он уже откликнулся на изучение алгебраических числовых полей, получив интересные результаты по проблеме разложения идеалов, порожденных простыми числами, внутри идеальных простых чисел. Другими темами, которые он затронул, были теория коммутативных колец, доказательство теоремы об интеркаляции области некоммутирующих целых чисел внутри тела; кольца полиномов над непараллельными полями; факторизация

некоммутирующих колец. Однако в данном случае я привожу комментарии к теореме Оре.

Ключевые слова - Теорема Оре, универсальная алгебра, решетка.

Mathematical Subject Classification: 16U20.

I. INTRODUCCIÓN

Definición (Def. 1). $Y \subset X$. $\forall u$ en X representa un límite superior de Y [1] si $a \leq u \forall a \in Y$. Si u representa el límite superior de $Y | u \leq v$ para todo otro límite superior $v \in Y$, entonces u representa el menor límite superior o supremo de Y . Además, cualquier elemento $l \in X$ representa el límite inferior de $Y | l \leq a \forall a \in Y$. Si l representa el límite inferior de $Y | k \leq l$ para todo otro límite inferior de Y , entonces l representa el mayor límite inferior o ínfimo de Y .

Consecuencia 1.- $Y \subset X | Y \neq \emptyset$. Si Y posee un mínimo límite superior, entonces este límite es único. Además, si Y posee un máximo límite inferior, entonces también este límite es único.

Prueba:

Sean u_1, u_2 los mínimos límites superiores de Y . $u_1 \leq u$ para todos los límites superiores de u de Y (Def. 1). Como caso particular $u_2 \leq u_1 \therefore u_1 = u_2$ (por anti-simetría). ■

Def. 2.-El conjunto L representa una retícula [1] tal que cada par de elementos de L posee un mínimo límite superior y un máximo límite inferior. Por convenio [1], el mínimo límite superior de $a, b \in L$, se denomina *unión* de a y b denotado por $a \vee b$, mientras que el mayor límite inferior de $a, b \in L$ se denomina el *encuentro* o *intersección* entre a y b denotado por $a \wedge b$.

Escolio 1.- En el contexto de la estructura de las retículas [2], y con relación a un conjunto parcialmente ordenado tenemos:

$$a) \sup\{a, b\} = b, \inf\{a, b\} = a$$

Describe un conjunto linealmente ordenado o cadena C en que $a, b \in C | a \leq b$.

$$b) \sup\{A, B\} = \{x : x = a + b | a, b \in B\}$$
$$\inf\{A, B\} = A \cap B$$

Describe los subespacios de un espacio vectorial ordenado por inclusión.

$$c) \sup\{A, B\} = A \cup B.$$

$$\inf\{A, B\} = A \cap B.$$

Describe a los subconjuntos de un conjunto ordenado dado por inclusión.

d) $a \leq b$ si $b = a \cdot c$ para cierto valor c , donde:

$\sup\{a, b\}$ es el mínimo común múltiplo (m c m) de a y b ;

$\inf\{a, b\}$ es el máximo común divisor (M C D) de a y b .

Describe la relación de números enteros no negativos ordenados por divisibilidad.

c) $\sup\{f, g\} = u$, en que:

$$u(t) = \max\{f(t), g(t)\},$$

$\inf\{f, g\} = v$, donde:

$$v(t) = \min\{f(t), g(t)\}$$

Describe funciones de valor real definidas sobre el intervalo $[0,1]$ y ordenados dada la condición: $f \leq g$, si $f(t) \leq g(t) \forall t \in [0,1]$.

II. RETÍCULAS.

Def. 3.- Si L representa una retícula [1], entonces L llega a ser un álgebra Universal con dos operaciones binarias:

$$a + b = \sup\{a, b\}$$

$$a \cdot b = \inf\{a, b\}$$

Escolio 2.- Por convenio [2], los símbolos \cup e \cap (Teoría de Conjuntos) o \vee y \wedge (Lógica proposicional) son utilizados frecuentemente en vez de $+$ y \cdot (operadores para Grupos Abelianos), respectivamente.

Def. 4.- Toda álgebra universal satisface las siguientes identidades:

$$1) a + a = a; a \cdot a = a$$

$$2) a + b = b + a; a \cdot b = b \cdot a$$

$$3) (a + b) + c = a + (b + c); (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Escolio 3.- Axiomas 2, 3 y 4 de G. Peano, (1889).

$$4) a(a + b) = a; a + a \cdot b = a$$

Escolio 4.- Propiedad distributiva del Anillo de Enteros.

Consecuencia 2.- Si representa un conjunto con dos operaciones binarias con todas las propiedades en Def. 4, es posible distinguir un orden \leq sobre L al asignar la desigualdad: $a \leq b$ si $a + b = b$, y resulta en este caso que $a \leq b$ sí y solamente si $a \cdot b = a$. El conjunto parcialmente ordenado corresponde a una retícula con la siguiente característica: $\sup\{a, b\} = a + b$; $\inf\{a, b\} = a \cdot b$.

Def. 5.- Las retículas forman una variedad de álgebras universales, cuando un álgebra universal satisface las condiciones en Def. 4.

Def. 6.- SI L y L' representan retículas y si $f: L \rightarrow L'$ es un isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados, entonces f es también un isomorfismo de álgebras universales correspondientes: $f(x + y) = f(x) + f(y)$; $f(xy) = f(x) \cdot f(y) \forall x, y \in L$.

Consecuencia 3.- Un mapeo isotónico arbitrario de L en L' no necesariamente es un homomorfismo de estas retículas

consideradas como álgebras universales: $\forall a \in L$, los mapeos $f(x) = x + a$ \wedge $g(x) = x \cdot a$ representan mapeos isotónicos de la retícula L sobre sí misma, pero también son homomorfismos sí y solo si L tiene la propiedad de retícula distributiva.

Teorema 1.- Una retícula L es distributiva [1] cuando satisface la siguiente propiedad distributiva:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \mid \forall a, b, c \in L.$$

Prueba:

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &= [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] = \\ &= a \vee [(c \wedge a) \vee (c \wedge b)] = a \vee [(c \wedge (a \vee b))] \\ &= a \vee [(a \vee b) \wedge c] = \\ &= [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] = \\ &= (a \vee b) \wedge (a \vee c). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

III. TEOREMA 2.- (ORE).

Si L representa una retícula dimensional [3], entonces por hipótesis se genera la siguiente expansión: $a = x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_{m-1} = y_0 \cdot y_1 \cdot \dots \cdot y_{n-1}$ en que x_i, y_j no son factorizables, entonces existe una correspondencia inyectiva $i \rightarrow j(i)$ entre m y n tal que para cada $r < m$ se tiene: $a = y_{j(0)} \cdot \dots \cdot y_{j(r)} \cdot x_{r+1} \cdot \dots \cdot x_{m-1} = y_0 \cdot \dots \cdot y_{j(r)-1} \cdot x_r \cdot y_{j(r)+1} \cdot \dots \cdot y_{n-1}$. En particular, $m = n$, además para cada r , el cociente reticular es isomórfico.

Prueba:

La expansión de a representa a un conjunto parcialmente ordenado (Escolio 1) (Axiomas 4-9, Peano 1889) con la característica de que sus elementos poseen un máximo límite inferior de la sucesión representada por la expansión de a (Consecuencia 1), por lo tanto, existe un conjunto con esta característica (Def. 1) confirmando la hipótesis planteada. Además, la relación entre los elementos descritos en la expansión se caracteriza como encuentro o intersección de elementos (Def. 2). Los elementos de la expansión son de la forma $4n \pm 1 \vee 6n \pm 1$ por lo que sus factores son sólo ellos o la unidad garantizando así la correspondencia inyectiva en dicha expansión. L es un álgebra universal ya que la asociatividad entre sus elementos es una característica de ésta (Def. 3), (Def. 4 (3)). Esto aplica también para la relación $r < m$ y la expansión correspondiente de a . \blacksquare

Escolio 5.- En [3], la parte medular de la prueba se basa en el axioma 9 (Peano, 1889), detallada como prueba por inducción. Mi propuesta consiste en ofrecer más detalles sobre su propuesta.

IV. CONCLUSIONES.

Dentro de una perspectiva general, resalta la importancia de la equivalencia entre los lenguajes de la Teoría de Conjuntos, de la lógica Proposicional y de los operadores en los Grupos Abelianos. También se destaca el papel del Teorema del Supremo en la justificación de las álgebras universales como una condición necesaria para el estudio del álgebra abstracta. La propiedad distributiva, como una característica del Anillo de los Enteros se considera idea

básica para fundamentar la existencia del objeto matemático conocido como Reticula. Indudablemente que el trabajo publicado originalmente por Oystein Ore “Sobre los fundamentos del Álgebra” en 1935 y 1936 han contribuido esencialmente en el desarrollo del pensamiento matemático actual..

REFERENCIAS

- [1] T. W. Judson, *Abstract Algebra*, Orthogonal Publishing, Ann Arbor, 2015.
- [2] I. N. Vinogradov (Chief editor, 1990), *Encyclopaedia of Mathematics*, Vol. 5, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.
- [3] P. Pierce, *Introduction to the Theory of Abstract Algebras*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA.

- G. Peano, *Arithmetices Principia. Nova methodo expósita*, Fratres Bocca, Torino, 1889.
- O. Ore, On the foundations of abstract algebra 1, *Annals of Math*, vol. 36, pp. 406-437, 1935.
- G. Birkhoff, On the structure of abstract algebra, *Proc. Cambridge Phil Soc.*, vol. 31, pp. 433-454, 1935.
- B. L. Van der Waerden, *Algebra*. Vols. 1, 2, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1970.
- P. Hilton, Y-Ch. Wu, *A course in Modern Algebra*, Wiley Interscience Series, New York, 1974.
- W. Narkiewicz, *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1974.

Modelado matemático y diseño de un sistema de procesamiento de señales *EEG* para control de sistemas robóticos.

Marcos Fajardo Rendón

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

fajardoensm@gmail.com

Resumen- En el presente artículo se diseña el modelo matemático de un sistema de control mediante procesamiento de señales *EEG*, la construcción un prototipo electrónico de control cerebral (*BCI*) con preprocesamiento de bio-señales mediante un procesador de señales digitales (*DSP*) utilizando la transformada rápida de Fourier (*FFT*) y un clasificado-graficado en un sistema computacional en *Python* usando el análisis discriminante lineal de Fisher (*FLDA*) aplicable a distintos sistemas robóticos como el caso experimental presentado de un manipulador de 5 grados libertad con servomotores manejados por ancho de pulso modulado (*PWM*).

Palabras Clave- modelado matemático, *FFT*, *FLDA*, *BCI*, neurorobótica.

Abstract- This paper describes the design of the mathematical model of a control system using *EEG* signals processing, the construction of an electronic brain control interface prototype (*BCI*) with pre-processing of bio-signals with a digital signal processor (*DSP*) using the fast Fourier transform (*FFT*) and a classification-graphing in a computational system in *Python* using Fisher's linear discriminant analysis (*FLDA*) applicable to different robotic systems as the experimental case presented of a manipulator of 5 degrees of freedom with servomotors driven by pulse width modulation (*PWM*).

Keywords- mathematical modeling, neurorobotics, *FFT*, *FLDA*, *BCI*.

Mathematical Subject Classification: 68T05, 68T10, 68T15, 68T40, 60B15, 65T50.

I. INTRODUCCIÓN

El cerebro es un sistema que permite el control de distintas funciones de los sistemas biológicos pudiendo ser una masa de neuronas interconectadas como en la mayoría de los animales [1], una distribución a través del cuerpo como las medusas o un sistema complejo de redes estímulo-respuesta foto-hidro-kinestésico distribuido como en los vegetales [2].

En todos los caso anteriores éstos seres responden a estímulos de distintos factores y permiten un pensamiento complejo para solucionar un problema de supervivencia reflejado en respuestas. Numerosas obras literarias de ciencia ficción y *ciberpunk* en cine y animés describen como con interfaces incrustadas en la cabeza o embebidas al cerebro se puede manipular remotamente robots gigantes de combate, manipuladores industriales, androides y réplicas bio-inspiradas en el cuerpo humano que van a trabajar para no ser dañado el cuerpo biológico original del operador.

Para poder saber lo que un usuario-operador de éstos sistemas piensa se requiere la medición de la actividad

cerebral, para lo cual existen actualmente métodos como el *magnetoencefalograma (MEG)*, la *espectroscopia de infrarrojo cercano (NIRS)*, el *electrocorticograma (ECoG)*, la *resonancia magnética funcional (fMRI)* y el que se trata en éste artículo: el *Electro-Encephalo-Gram o electroencefalograma (EEG)* [3].

Para poder controlar una máquina se requiere una *Interfaz Cerebro-Computadora o Brain-Computer Interface (BCI)*; siendo los electrodos de tipo invasivo o no invasivo [3].

Existe un amplio marco referencial de prototipos que han logrado ser controlados mentalmente por un usuario mediante una *BCI* como brazos robot [4], sillas de ruedas [5] o androides [6]; así mismo universidades como *Carnegie Mellon University (CMU)* y *Minnesota* desarrollaron una de las primeras *BCI* funcional no invasiva [7].

Este tipo de control podría generalizarse y utilizarse con muchos fines tanto para devolver la movilidad a personas con discapacidades motrices o paráliticas, realizar tele-cirugías de precisión [8] o simplificar la vida cotidiana.

II. NEUROCONTROL

Las señales del cerebro pueden clasificarse según su frecuencia y han sido relacionados a distintos procesos cognitivos.

La señal *gamma* se encuentra en el intervalo de 32 a 100 Hz y se intensifica por procesos como la percepción, aprendizaje, resolución de problemas y procesos cognitivos [9]. La señal es importante para la investigación ya que es cuando el usuario realiza tareas mecánicas cotidianas en lugar de prestar atención al cómo resolver un movimiento del aparato a controlar, junto con la beta es la más importante para su análisis de los deseos del neuro-operador.

Las señales *beta* se encuentran entre 13 y 32 Hz [10] siendo intensificado cuando los seres humanos se despiertan de un sueño, estados de alerta, pensamiento y factores de excitación [11]; es importante que el usuario controle los factores externos de distracción que puedan contaminar sus pensamientos y por lo tanto el procesamiento.

Las señales *alpha* se encuentran entre 8 a 13 Hz [12] y es la señal común ante un estado físico y mentalmente relajado [10]; siendo este el estado deseable para el control de la maquinaria, ya que no se encuentra interferido por factores externos logrando una concentración óptima y pudiendo lograr una mejor operación del sistema.

La señal *theta* se comprende entre 4-8 Hz [10] y se genera por factores como la creatividad y estados de concentración [10] como los sueños, meditación y conciencia reducida; siendo una de las deseables para lograr un control en donde no sea afectado por factores externos que distraigan la atención de operación.

Las señales *delta* se encuentran comprendidas entre 0.5 a 4 Hz [10] durante los estados de sueño profundo o pérdida de conciencia [10]; por lo cual esta no es una señal candidata de trabajo y es descartable de acuerdo con los estudios realizados con el hardware para los fines del proyecto.

Los modelos de evocación de una señales en el cerebro son los denominados paradigmas *SSVEP*, *ERP* y *MI* [13].

SSVEP es un modelo generado por estímulos visuales; es decir desde los fotorreceptores las señales se envían a las áreas visuales del cerebro y posteriormente al resto del cerebro [13].

En *ERP* o mecanismo de evocación la señal se genera cuando un estímulo específico actúa sobre el sistema sensorial del cerebro o se produce algún factor mental generando la aparición o desaparición del estímulo [13].

Mediante *MI* o Mecanismo de generación la imaginación motora de movimientos se puede considerar como un acto motor sin que se produzca ninguna ejecución motora [13] siendo el utilizado en éste artículo.

Las técnicas de decodificación más comunes son preprocesamiento, extracción de características y métodos de calificación. Para el preprocesamiento del *BCI* se parte del filtrado en el dominio de la frecuencia y espacial.

Los filtros de paso de banda y de supresión de picos son los más utilizados para el dominio de la frecuencia permitiendo la extracción de patrones de señales, permitiendo amplificar la relación señal/ruido de la señal cerebral, pudiendo también utilizarse para extraer características.

En el método *ICA* se utiliza para mejora la señal débil de *EEG*, reduciendo el ruido y haciéndola adecuada para el análisis [13].

Por otro lado los métodos de extracción de características como la *transformada de Fourier (FT)*, la *transformada rápida de Fourier (FFT)* y la *transformada discreta de Fourier (DFT)* permiten el *análisis de la densidad del espectro de potencia (PSDA)* como se describe en éste artículo.

Los métodos de clasificación de características suelen utilizar clasificadores como el *Análisis Discriminante Lineal (LDA)*, *Máquinas de Vectores Soporte (SVM)*, redes neuronales y clasificadores con *Bayes* o *Gauss* por *análisis lineal de discriminantes (LDA)* entre otras técnicas [14] como las utilizadas en el presente artículo.

El *EEG* registra las oscilaciones de los potenciales eléctricos cerebrales postsinápticos por el dipolo generados en las dendritas apicales de las células piramidales de la corteza mediante electrodos situados en el cuero cabelludo.

Los polos en el dipolo eléctrico es la fuente y la disipación de las corrientes iónicas generadas mediante la existencia o ausencia de cationes en el soma y dendritas apicales [1]. Los iones se mueven por el líquido cefalorraquídeo y los tejidos cerebrales generando corrientes iónicas como consecuencia de la existencia de un potencial eléctrico [1].

Por lo tanto, es posible conectar un sistema de adquisición de señales entre dos puntos cualesquiera en el cuero cabelludo que describan una línea de corriente iónica.

La impedancia entre el cuero cabelludo y un electrodo se caracteriza mediante una fuente de tensión de media-celda en

serie con la impedancia del gel mediante ($V_{hc} + R_g - C_g$) más la impedancia del *SC* ($V_{sc} + R_{sc} - C_{sc}$) [15].

La posición de cada electrodo es importante debido a que entre más cerca estén el uno del otro, menos diferencias habrá entre los ambos. Los electrodos amplifican por un factor de 5 a 10 para que posteriormente un preamplificador diferencial filtre y amplifique la señal por un factor de 10 -100 [15]. Estos procesos de *pre-amplificación* son exclusivos de electrodos activos [15].

Los electrodos no invasivos pueden ser húmedos, semisecos y secos. Para el presente trabajo se seleccionaron los húmedos al tener una mejor transducción de las corrientes iónicas al utilizar un gel electrolítico formado por *Aniones-Cloruro (Cl)* como interfaz *electrodo-electrolito no polarizado* [15] además de logra una interfaz con el electrodo y cuero cabelludo estable del electrodo.

Un factor importante en los electrodos es la impedancia de contacto *piel-electrodo*, ya que es un parámetro que determina el ruido [15].

III. METODOLOGÍA DISEÑO ELECTRÓNICO DEL SISTEMA DE CONTROL *EEG*

Los amplificadores biopotenciales permiten modelar la señal transformando mediante amplificación de la señal las ondas registradas en microvoltios en datos para su procesamiento y digitalización.

El sistema propuesto se describe en la figura 1 en donde se muestra como se reciben las señales *EEG* mediante electrodos a un sistema de adquisición de señales para ser procesadas mediante un *BCI* formada por Hardware y una computadora en donde se grafican las mismas; reconociendo patrones de cada uno de los comandos establecidos para mandar una orden al sistema de control para mover un robot.

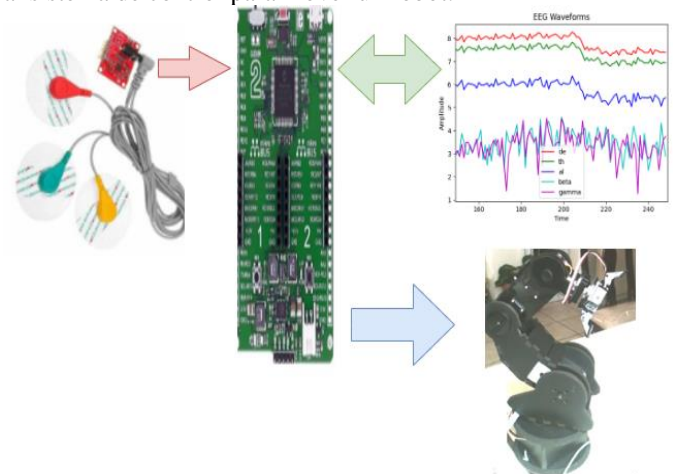


Fig. 1 Modelo general del sistema de procesamiento de señales *EEG* para el control sistemas robóticos.

Originalmente se optó por dedicarse a la programación del sistema de control para un manipulador industrial de 5 grados de libertad seleccionado [16]; por lo que se adquirió el *Insight 5 Channel Wireless EEG Headset* de *Emotiv* [17] el cual tiene un costo aproximado de 499 USD, siendo un dispositivo de muy mala calidad, al contar con poca asistencia técnica, problemas de desconexión bluetooth y un alto costo por el simple uso de software de comunicación para lectura de valores y envíos a un puerto *COM* mensualmente, al no ser un software abierto; es decir además de ser un hardware de alto costo, se debe estar pagando por su propio uso de

comunicación con un *login* que requiere internet para cada inicio, eso sino se desconecta el *bluetooth* cada minuto.

Posteriormente se adquirió un *EEG* data de *Neurosky Mindwave Mobile 2* de 165 USD [18]; el cual si bien es de software abierto; nuevamente presenta problemas de conexión, en éste caso de apareamiento *bluetooth* con distintos dispositivos, por lo que tampoco se recomienda aunque se hayan usado distintas categorías de *bluetooth* en la presente investigación, siendo imposible su conexión a un simple puerto *COM*.

Con base en la ausencia de calidad de los dispositivos comerciales anteriores debido a sus serios problemas de conexión inalámbrica y ausencia de interfaces alámbricas, se optó por el diseño total del sistema *BCI* mediante electrodos *EEG* y un pre procesamiento-amplificación con un *procesador de señales digitales*.

El sensor de *Analog Devices AD8232* [19] es descrito en su hoja técnica como un *Single-Lead, Heart Rate Monitor Front End ECG*; pero también aparece descrito en el mismo documento -*poco explotado*- como un *sistema de adquisición de señales Biopotenciales* [19]. Su diagrama de bloques se describe en la figura 2.

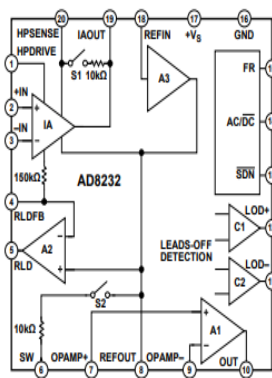


Fig. 2 Diagrama de bloques funcional del AD8232. Fuente: <https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ad8232.pdf>

Distintos autores han analizado el potencial de *AD832* como sistema de adquisición de señales biopotenciales [20], no solo pudiendo funcionar como *ECG*, sino también como *EMG* (*electromiograma*) o *EEG* (*electroencefalograma*) [21] obteniendo excelentes resultados con un costo extremadamente menor a un *EEG* dedicado.

Algunos autores utilizaron un filtro de corte de 60 Hz por hardware para adquirir las señales *EEG* [21] de modo que la banda de frecuencias del *EEG* (que puede alcanzar los 100 Hz) se encuentre limitado a la banda de frecuencias del módulo *ECG* cercano a los 45 Hz. En el presente trabajo se realiza la compensación pero por programación del *DSP* emulando el filtro de corte [21] descrito.

Respecto a sus electrodos incluidos en el *AD832*, éstos son semisecos y se utilizó una solución gel que fue lo único que se pudo rescatar de la compañía *EMOTIV*, como se muestran en la figura 3.

Para la adquisición y *preprocesamiento* del *AD832* se seleccionó el microcontrolador de señales digitales *Digital Signal Controller (DSC)* de Microchip *dsPIC33EP512MU810* [22] funcionando como *DSP* y *DSC* con los servomotores, el cual cuenta con un núcleo de 70 *MIPS* con *DSP* integrado y periféricos mediante un microcontrolador de 16 bits, 512 KB de memoria de programa y 53,248 bytes de *RAM*, *USB 2.0*, *HS* y puertos para el control de ancho de pulso modulado o *Pulse-*

width modulation (PWM) del manipulador pudiendo incorporarse un sistema parecido al de Fajardo-Herrera(2013) [23] como se muestra en la figura 4.



Fig. 3 Electrodo AD832

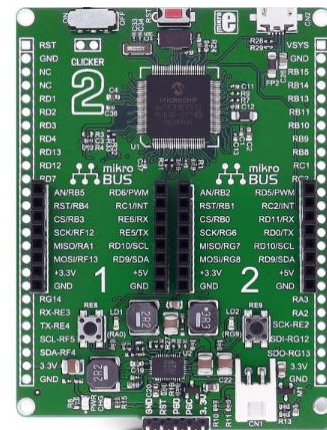


Fig. 4 Tarjeta con el Microchip dsPIC33EP512MU810 embebido en clicker 2. Fuente: <https://www.mikroe.com/>

IV. DISEÑO DEL MODELO MATEMÁTICO DE CONTROL *EEG*

El *EEG* requiere la captura de señales para lograr un análisis y reconocimiento de patrones.

Se inicia con la descripción del modelo matemático de disparo sináptico que describe las ráfagas periódicas y aperiódicas de las neuronas mediante tres ecuaciones diferenciales de 1er orden acopladas que describe el trabajo de *J. L. Hindmarsh, R. M. Rose y A. F. Huxley*(1984) [24] el cual consiste en tres ecuaciones diferenciales acopladas dinámicamente que serán detectados por los electrodos anteriormente descritos [19].

Una neurona sin activación tiene un voltaje en su membrana con concentración iónica K^+ y Na^+ de la misma que cuenta con canales formados por proteínas transmembranales con propiedades supramoleculares que permiten el paso o cierre de determinados iones denominados rápidos y lentos [24].

Definición 1.

Sean los siguientes variables en \mathbb{R} :

x_0 el estado de reposo del sistema, s la adaptación del sistema respecto al comportamiento, I la corriente externa hacia la neurona, a la variable conmutable respecto a los comportamientos, x el potencial de membrana con su permeabilidad respecto a los tipos de iones, y el proceso de transporte de los iones a través de canales rápidos y z el proceso de transporte de los iones a través de canales lentos; así mismo los parámetros $b, c, d \in \mathbb{R}^+$ son variables que permitirán formar señales periódicas y aperiódicas de las

neuronas [24] mediante las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$x = y + bx^2 - ax^3 - z + I \quad (1)$$

$$y = c - dx^2 - y \quad (2)$$

$$z = r[s(x - x_0) - z] \quad (3)$$

La señal proveniente de los electrodos es amplificada y *preprocesada* por el módulo AD832 que recibe el voltaje de la señal de entrada $Ve(t)$ en volts, el voltaje pico máximo de la señal (V_p) en volts y el voltaje eficaz ($V_{rms(t)}$) en volts de una forma de onda descrita por un periodo T en segundos descrita por la ecuación 4:

$$V_{rms(t)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\infty} (Ve(t)) \cdot (Ve(t)) \cdot dt} \quad (4)$$

Para ser compensada como se describió anteriormente por software mediante el *dsPIC* para extraer características a clasificar mediante el *factor de cresta para la clasificación de señales (CFSG)* [25] como resultado de la división:

$$FC = \frac{V_p}{V_{rms(t)}} \quad | 0 < t \leq T \quad (5)$$

La técnica *CFSG* [25] permite el análisis de la señal respecto al dominio del tiempo para lograr un factor cresta constante, si una forma de onda también lo es; alterando solamente el valor al cambiar la forma de onda.

La bifurcación es el fenómeno que presenta un sistema respecto a la variación de algún parámetro; una forma de representar el sistema es mediante un mapa de Feigenbaum [26], el cual describe las trayectorias de un sistema e indica sus convergencias mediante puntos de equilibrio y límites cíclicos, aunque estos sean entrópicos [25].

Lo anterior puede ser descrito como el comportamiento desde un punto inicial caracterizando las abscisas como el parámetro de bifurcación λ y las ordenadas como los valores $x(k)$ descartando el transitorio como se presenta en la siguiente ecuación:

$$x \cdot (k + 1) = \lambda x(k) \cdot (1 - x(k)) \cdot x(0) = x(0) \quad (6)$$

Dados los tres posibles estados neuronales: espiga, ráfaga periódica y ráfagas aperiódicas [25] capturados por el electrodo y el filtrado anteriormente descritos en un valor I se varía la señal en el intervalo (*min-max*) para lograr los tres estados, almacenando en un registro sus máximos de cada espiga descrita como las ordenadas.

Se genera la diferencia del registro con respecto al valor del tiempo subsecuente de registro del máximo de la siguiente espiga para posteriormente generar su inversa para obtener la frecuencia de aparición en las abscisas.

El procedimiento es iterativo en cada valor de la señal del intervalo I permitiendo obtener las convergencias y puntos de equilibrio del diagrama de Feigenbaum.

Lo anterior se presenta en el siguiente pseudocódigo:

```

Entrada = Potencial de membrana  $x$ .
Salida =  $F(i) \in \mathbb{R}$ .
Mientras  $i = 0.5 : 4.7$  Hacer:{
     $ub$  registro de máximos de secal  $x$  ( $tmax$ 
    espiga)
    Mientras  $j = 1 : valor$  del vector ( $ub$ ) 1
    Hacer:{
         $rt$   $ub(j)$   $ub(j + 1)$  (diferencia  $t$ 
        y picos)}
    }
 $F(i) = \frac{1}{rt}$ .
    
```

Antes de aplicar una transformación del dominio tiempo en frecuencia se debe analizar la señal mediante “*ventanas*” [28]; las cuales son intervalos de tiempo finito que permiten fraccionar una señal continua para cuantificar el número de espigas.

El proceso de clasificación de comportamientos [29] de una señal neuronal adquirida por el sistema de electrodos anteriormente descrito requiere el registro de los umbrales de superación de espigas de referencia en el envío de pulsos en ventanas [28] de tiempo que se describen como una serie

La señal amplificada requiere un análisis de características dinámicas mediante de la interpretación de los coeficientes de autocorrelación temporal y densidad de potencia espectral respecto a la medición realizada en un intervalo de tiempo y velocidad de la señal en posiciones específicas [30] generadas por el AD832 por lo que la señal sin ruido llega al *dsPIC* para la extracción de características fue seleccionada la técnica denominada *transformada rápida de Fourier* a la cual será utilizada con base en (5). Por lo anterior se parte de las siguientes definiciones:

Definición 2:

Sea una función integrable y periódica $f(x)$ definida sobre el intervalo $[-\pi \dots \pi]$ que es defendida como la suma infinita de senos y cosenos (*modos normales de vibración de una cuerda*) [28] es una serie $s \in Fourier$ descrita mediante los coeficientes a_k, b_k ; donde k indica el coeficiente k -ésimo de una secuencia $[n_0, n_0 + 1, n_0 + 2 \dots]$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + [\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k)] \cdot x + [\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k)] \cdot x \quad (7)$$

Definición 3:

Sea una serie s_1 y $T^n \simeq \frac{\mathbb{R}_n}{\mathbb{Z}_n}$ un *toroide* formado por la traslación iterativa de instancias del producto de $s_1 \times s_1 \dots \times s_1$ alrededor de una circunferencia en donde dada una secuencia su coeficiente $k = (k_1, \dots, k_n)$ y $k \cdot \theta = k_1 \theta_1 + \dots + k_n \theta_n$; por lo que una *serie s de Fourier (F)* [28] se describe sobre una función de \mathbb{Z}_n como:

$$\mathcal{F} = f(k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(\theta) e^{-ik \cdot \theta} d\theta. \quad (8)$$

Así mismo la *transformación lineal* L^1 de \mathcal{F} respecto a un espacio de funciones acotadas como $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n) \in \mathbb{Z}^n$ con su *norma supremo* [31] dado por (9):

$$L^1(T^1) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}^n). \quad (9)$$

Dadas las series: $k^\alpha, D^\alpha \mid k^\alpha = k_1^{\alpha_1} \dots k_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, D_j = i \frac{\partial}{\partial \theta_j}$; si $f \in \mathbb{C}^\infty(T^n)$, su integración por partes será:

$$k^\alpha \cdot \hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} (D^\alpha \cdot f)(\theta) e^{-ik \cdot \theta} d\theta. \quad (10)$$

Definición 4

$\therefore \mathcal{F}$ [28] se define como:

$$C^\alpha(T^n) \rightarrow s(\mathbb{Z}^n) \mid (\mathbb{Z}^n) = \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} (k)^N |u(k)| < \infty. \quad (11)$$

Definición 5:

Utilizando la definición 4. Sea f una función integrable a T^d y $f^\#$ la transformada de Fourier (TF) [28]; siendo la discretización de la $s1$ remplazada por un grupo \mathbb{C}_{mod1} definido por el grupo $\Gamma_n \mid (w = e^{\frac{2\pi i}{n}}) \rightarrow \Gamma_n$, por lo que es posible aproximar T^d mediante $(\Gamma_n)^d$ de forma similar al toroide T^n como el producto de d instancias iterativas de Γ_n .

Con una relación isomórfica del grupo cíclico:

$$\Gamma_n \simeq \mathbb{Z}_n = \frac{\mathbb{Z}}{(n)} \mid \Gamma_n \neq \mathbb{Z}_n \\ \therefore \exists_n \in \Gamma_n \mid n_{mod1} \in \mathbb{C} \wedge \exists_n \in \mathbb{Z}_n \mid n_{mod1} \equiv \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Así mismo para los grupos:

$$\Gamma_{n \rightarrow s1} \text{ y } \mathbb{Z}_{n \rightarrow \mathbb{Z}}; \\ ((w^j, \ell) \mapsto w^{j\ell}) \Rightarrow \Gamma_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C} \mid w^{jn} = 1. \quad (13)$$

Definición 6:

Dada una función f dada por: $\Gamma_n \rightarrow \mathbb{C}$; su transformada discreta de Fourier (FDT) [28] será la $f^\# = \Phi_n f$ que describa la señal discreta compuesta por puntos separados en un intervalo con un número finito de frecuencias con una transformación lineal de $\mathbb{Z}_n \Rightarrow \mathbb{C}$:

$$f^\#(\ell) = \frac{i}{n} (\sum_{w^j \in \Gamma_n} f(w^j) w^{-j\ell}). \quad (14)$$

Definición 7:

Análogicamente una función g definida en: $\mathbb{Z}_n \Rightarrow \mathbb{C}$; su transformada inversa de Fourier (IFT) [28] será la función g^b sobre el grupo $\Gamma_n \Rightarrow \mathbb{C}$. La función se define como:

$$g^b(w^j) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_n} g(l) w^{jl}. \quad (15)$$

Sea $\ell \in \mathbb{Z} = \frac{\mathbb{Z}}{n}$ y Γ_n el grupo multiplicativo en \mathbb{C} generado por $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ la transformada inversa:

$$f^\#(\ell) = \frac{1}{n} \sum_{w^i \in \Gamma_n} f(w^i) w^{-j\ell}. \quad (16)$$

Por lo que para cualquier valor ℓ multiplicado por $-j$; implicará $n - 1$ sumas y n multiplicaciones en \mathbb{C} , sumadas a n productos \mathbb{Z} donde $j\ell = m$ para generar w^m y $f(w^j)$. Si el cálculo de variación de ℓ es logrado independiente al esfuerzo

total para calcular la $f^\#$; esto implicará n^2 multiplicaciones y $n(n - 1)$ sumas de números \mathbb{C} sumado a otros procesos.

Definición 8:

La transformada rápida de Fourier (FFT) [28] es una metodología para el cómputo de $f^\#$ en $Cn(\log n)$ pasos en donde n es una potencia de 2. Lo anterior puede generar redundancias para el cálculo de los coeficientes de Fourier $f^\#(\ell)$. Para el caso Γ_4 :

$$4f^\#(0) = [f(1) + f(i^2)] + [f(i) + f(i^3)] \quad (17) \\ 4f^\#(2) = [f(1) + f(i^2)] - [f(i) + f(i^3)]$$

Y:

$$4f^\#(1) = [f(1) - f(i^2)] - i[f(i) - f(i^3)] \quad (18) \\ 4f^\#(3) = [f(1) - f(i^2)] + i[f(i) - f(i^3)]$$

Los coeficientes de Fourier de una función Γ_2 se determinan mediante la integración de un período p ; siendo el producto de la función y su evaluación en senos y cosenos que conforman la serie f_a :

$$f_a(1) = [f(1) + f(-1)]; f_a(-1) = [f(i) + f(i^3)] \quad (13)$$

Por lo que:

$$2f^\#(2\ell) = f_a^\#(\ell) \mid \ell = [0, 1] \quad (19)$$

Así mismo para f_b :

$$f_b(1) = [f(1) - f(-1)]; f_b(-1) = -i[f(i) - f(i^3)] \quad (20)$$

Y:

$$2f^\#(2\ell + 1) = f_b^\#(\ell) \mid \ell = [0, 1] \quad (21)$$

Los procedimientos anteriores permiten obtener la transformada de Fourier $f^\#$ mediante un procedimiento rápido (fft) con los hipotéticos valores adquiridos como lo describe las ecuaciones (1),(2),(3), voltajes de (4), una serie (8) y una cresta como en (5).

Su relación homomórfica viene dada por:

$$\text{Sea } n = 2^k \mid G_k = tn; G_{k-1} \triangleleft G_k; G_k \rightarrow G_{k-1} \\ \therefore w^j \mapsto w^{2^j}. \quad (22)$$

Sea $f: G_k \rightarrow \mathbb{C}$ que define las funciones f_a, f_b sobre $G_{k-1} \mid w_1 = w^2 \Rightarrow G_{k-1}$ donde:

$$f_a(w_1^j) = f(w^j) + f(w^{j+\frac{1}{2}n}) \quad (23)$$

$$f_b(w_1^j) = w^{-j} \cdot [f(w^j) - f(w^{j+\frac{1}{2}n})]. \quad (24)$$

Proposición 1: Con base a (1),(2),(3),(4),(5) y (21): Sean las siguientes identidades respecto a las transformadas f, f_a y f_b en la serie (8):

$$2f^\#(2\ell) = f_a^\#(\ell) \quad (25)$$

$$2f^\#(2\ell + 1) = f_b^\#(\ell) \quad \left| \ell \in \left[0, 1, \dots, \frac{1}{2}n - 1\right] \right. \quad (26)\square$$

Demostración 1:

Dado que $w_1 = w^2$, $w^n = 1$ y $w_1^{\frac{n}{2}} = 1$ entonces:

$$\begin{aligned} nf^\#(2\ell) &= \sum_{w^j \in G_k} f(w^j) \cdot w^{-2j\ell} \\ &= \sum_{w_1^j = w^{2j} \in G_{k-1}} [f(w^j) + f(w^{j+\frac{1}{2}n})] w_1^{-j\ell} \quad (27) \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra (25) ■

Demostración 2:

Dado que $w^{\frac{n}{2}} = -1$, entonces:

$$\begin{aligned} nf^\#(2\ell + 1) &= \sum_{w^j \in G_k} f(w^j) \cdot (w^{-j} \cdot w^{-2j\ell}) \\ &= \sum_{w_1^j = w^{2j} \in G_{k-1}} w^{-j} [f(w^j) - f(w^{j+\frac{1}{2}n})] w_1^{-j\ell} \quad (28) \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra (26) ■

Con el *preprocesamiento* de filtrado con la *Transformada Rápida de Fourier* (13) acorde a la definición 8 y los hipotéticos valores (1), (2), (3), (4) y (5) mediante el cambio del dominio tiempo a frecuencia fragmentando la señal en las “ventanas” [28] y caracterizadas se procede al envío datos de análisis para su clasificación en la computadora.

Para realizar la clasificación se seleccionó la técnica *Análisis discriminante lineal de Fisher* o *Fisher's Linear Discriminant Analysis (FLDA)* [32].

Para lo anterior se utilizan valores de los datos *EEG* de una *Gaussiana* con varianza finita y media cero con límites en error de clasificación [33].

Definición 9:

Dado el problema de aprendizaje supervisado de las *EEG* para su posterior autonomía una vez aprendido parte de la clasificación. Se identificará como x_q a una forma de onda con una frecuencia que corresponde a una de las *EEG* acordes con (1),(2),(3),(4) y (5); es decir a una clase *sub-Gaussiana* [33] mediante el *FLDA* [32] y \mathbb{R}^d el error de clasificación que se produce en caso de que el clasificador no aprenda respecto al espacio de datos:

$$x_q \in \mathbb{R}^d \quad (29)$$

Definición 10:

Sea $M_{k \times d}$ una matriz de proyección aleatoria *ortonormalizada* con entradas de una varianza *Gaussiana* finita con media cero como límites en el error de clasificación

[33] del *FLDA* respecto al espacio de datos *EEG* (1),(2),(3),(4) y (5).

Un espacio de datos bidimensional $k \times d$ de la serie (8) será:

$$R(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^k | R \in M_{k \times d} \quad (30)$$

Definición 11:

Sea $\{x_i, y_i\}^{i:1 \sim d} \sim D$ una distribución D desconocida con un punto de consulta $x_i \sim D \subseteq \mathbb{R}^d$ y $y_i \sim C$ una colección de patrones C conocidos.

Dado el problema de aprendizaje supervisado *EEG* con N pruebas de entrenamiento [32] etiquetadas como:

$$L_N = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N \quad (31)$$

Para una clase de funciones de una señal *EEG* H ; el objetivo es aprender de L_N una función $\hat{h} \in H$ con el menor error de generalización E posible [33], pero en términos de alguna función de pérdida P .

El objetivo es encontrar un $\hat{h} | P(\hat{h}) = \arg \min_{h \in H^{E_{xq}}}$; $x_i \sim D$ [32].

La medida de rendimiento será: $(0,1) - \text{pérdida} P_{(0,1)}$ [32].

En el conjunto de patrones *EEG* descrito la clase de funciones son instancias de *FLDA* que han sido aprendidas sobre señales de entrenamiento por un usuario del sistema; describe la probabilidad de que una onda *EEG* adquirida no vista anteriormente x_q con su etiqueta de clase y_q desconocida sea clasificada erróneamente por el sistema de aprendizaje.

$$L_N = \{(x_i, y_i): (x_i \in \mathbb{R}^k, x_i \sim D); y_i \in \{(0,1)\}\}_{i=1}^N \quad (32)$$

El clasificador generativo *FLDA* para el modelado de los datos de entrenamiento L_N encontrará el límite óptimo para toma de decisión entre clases. Si $\Sigma = \Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma_4$ y los patrones conocidos: $[de, th, al, be, ga] \in EEG2$; la clasificación óptima viene dada por el teorema de *Bayes* para cada elemento del conjunto finito de la señal a procesar nueva denominada *EEG1* acordes con (1),(2),(3),(4) y (5). Lo anterior se debe realizar iterativamente y para cada tipo de señal ya clasificada por su frecuencia como se describió anteriormente en *de, th, al, be, ga* y queda dado por:

$$\begin{aligned} h(x_q) &= 1 \left\{ \log \frac{f_1(x_q)}{f_0(x_q)} > 0 \right\} = \\ &1 \left\{ (EEG2 - EEG1)^T \cdot [\Sigma^{-1} \cdot (x_q - \frac{[EEG2 - EEG1]}{2})] > 0 \right\} \quad (33) \end{aligned}$$

El indicador devuelve 1 si la probabilidad es verdadera a clasificar o 0 si es falsa. f_y es la densidad *Gaussiana* cuya media de la señal sería: $G(EEG_y, \Sigma^{-1})$ con media EEG_y y una covarianza Σ , denominada como:

$$[(2\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot \det(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}]^{-1} \cdot e^{[-\frac{1}{2}(x - EEG_y)^T \cdot \Sigma^{-1}(x - EEG_y)]} \quad (34)$$

Para una distribución adecuada de datos existirán matrices individuales de covarianza pertenecientes a clases indicadas por Σ_y ; pese a que aunque el modelo *FLDA* genera

estimaciones de covarianza compartidas por la clase $\widehat{\Sigma}_y = \widehat{\Sigma}, \forall y$. Los parámetros EEG_y y Σ son estimados a partir de un conjunto de datos de entrenamiento.

Proposición 1.

Utilizando la definición 3 y (8) la serie s y su tiempo t como vectores en \mathbb{R}^d (29) con sus componentes: $\{s_i, t_i\}^{i=1} \sim D$ una distribución de media cero [34]; con una varianza finita distinta de cero $0 < \sigma^2 < \infty$ para el reconocimiento de una situación como (29) con (1), (2), (3), (4) y (5).

Sea denotada como $\|\cdot\|$ la *norma Euclídea* [35] de ésta proposición y utilizando (8) $\langle s, t \rangle$ el producto interno de la serie (8) s y t [35].

La probabilidad Pr es:

$$\begin{aligned} & Pr_{s,t} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \left\langle \frac{s}{\|s\|}, \frac{t}{\|t\|} \right\rangle = 0 \right\} = \text{verdadera} \\ Pr_{s,t} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\|s\|}{\|t\|} = 1 \right\} &= \text{verdadera} \mid s \perp t; \|s\| \rightarrow \|t\| \quad (35) \square \end{aligned}$$

Demostración 3

Sea una serie (8) de acuerdo a la definición 8 y (22) $\frac{\|s\|}{\sqrt{d}}$ de la proposición 1 que tiende a converger en σ ; por lo que: $E[s_i^2] = Var[s_i] = \sigma^2$; si los valores son positivos de acuerdo con (1), (2), (3), (4) y (5) y s_i^2 es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida [36]:

$$Pr_{s,t} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^d s_i^2}{d} = \sigma^2 \right\} = Pr_{s,t} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^d s_i^2}{d}} = \sigma \right\} \quad (36)$$

Si se aplica la ley de los grandes números en una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida [36]: $Pr_{s,t} = 1$ en (36); similarmente a cuando $\frac{\|s\|}{\sqrt{d}}$ tiende a converger en σ lo puede hacer $\frac{\|t\|}{\sqrt{d}}$ y: $E[t_i^2] = Var[t_i] = \sigma^2$; si los valores son positivos y t_i^2 es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida [36]:

$$Pr_{t,s} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^d t_i^2}{d} = \sigma^2 \right\} = Pr_{t,s} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^d t_i^2}{d}} = \sigma \right\} \quad (37)$$

$s_i, t_i \leftrightarrow \forall i \rightarrow E[s_i t_i] = 0$ para valores independientes s_i, t_i con (1), (2), (3), (4) y (5) y aplicando nuevamente la ley de los grandes números se obtiene (35):

$$Pr_{s,t} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\|s\| \|t\|}{d} = \sigma^2 \right\} = \text{verdadera} \quad (38)$$

Usando lo anterior se puede construir una negación:

$$\begin{aligned} & Pr_{s,t} \left\{ \left(\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\langle s, t \rangle}{d} \neq 0 \right) \vee \left(\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\|s\| \|t\|}{d} \neq \sigma^2 \right) \right\} \leq \\ & Pr_{s,t} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\langle s, t \rangle}{d} \neq 0 \right\} \quad (39) \end{aligned}$$

Y:

$$+ Pr_{s,t} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\|s\| \|t\|}{d} \neq \sigma^2 \right\} = 0 + 0 = \text{falsa} \quad (40)$$

Por lo tanto:

$$Pr_{s,t} \left\{ \left(\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\langle s, t \rangle}{d} = 0 \right) \wedge \left(\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\|s\| \|t\|}{d} = \sigma^2 \right) \right\} \geq 1 \quad (41)$$

Y:

$$\begin{aligned} & - \left(Pr_{s,t} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\langle s, t \rangle}{d} \neq 0 \right\} \right) + \\ & Pr_{s,t} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\|s\| \|t\|}{d} \neq \sigma^2 \right\} = \text{verdadera} \quad (42) \end{aligned}$$

Si $0 < \sigma^2 < \infty$; entonces:

$$\begin{aligned} & Pr_{s,t} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\langle s, t \rangle}{\|s\| \|t\|} \cdot \sigma^2 = 0 \right\} = \\ & Pr_{s,t} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\langle s, t \rangle}{\|s\| \|t\|} = 0 \right\} = \text{verdadera} \quad (43) \end{aligned}$$

Al ser 1 es verdadera. ■

Demostración 4

La tendencia a converger con los valores descritos en con (1), (2), (3), (4), (5) de (29) y también puede demostrarse en σ mediante la derivada de la función cociente de las funciones con derivada; dado que existe (8) como (22) $\frac{\|t\|}{\sqrt{d}}$ y $\frac{\|s\|}{\sqrt{d}}$; tienden a converger en σ ya que $\sigma \neq 0$:

$$\begin{aligned} & Pr_{s,t} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^d s_i^2}{d} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^d t_i^2}{d} \right)^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\} = \\ & Pr_{s,t} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\|s\|}{\|t\|} = \text{verdadera} \right\} \quad (44) \end{aligned}$$

Similar a (43) al ser 1, es verdadera ■

V. PROGRAMACIÓN Y MANUFACTURA DEL SISTEMA DE PROCESAMIENTO DE SEÑALES EEG PARA EL CONTROL DE SISTEMAS ROBÓTICOS.

Utilizando el modelo matemático descrito en la sección anterior formado por el modelo de la *FTF* con los parámetros de filtrado se procedió a programar un código para el *dsPIC33EP512MU810* con librerías especializadas que generan la técnica *CFSG* [25] descrita en (5) que permite el análisis de la señal respecto al dominio del tiempo para lograr un factor cresta constante, compensación mediante escalamiento, filtros pasa-bandas mediante factor de suavizado de las frecuencias media móvil para las *EEG* descritas y comparación de voltaje para lograr el análisis de señales en tiempo real.

Así mismo se utilizaron librerías para la *transformada rápida de Fourier* y filtrados mediante ventanas de muestreo (*Windowing*) de tipo *blackman* y *forward*; así mismo se usó

una *FFT* de conversión a magnitud y una frecuencia de muestreo de 1 milisegundo.

Para la clasificación en *Python* en la computadora se utilizó el modelo matemático de reconocimiento de patrones por *FLDA* mediante la *Interfaz de Desarrollo o Interface Development Kit (IDE) Spyder* haciendo uso de las librerías de comunicación con la PC *serial* mediante *USB*, conteo de series en tiempo real mediante *time*.

Se utilizaron librerías de *machine learning* como *numpy* de cómputo científico que integra comandos a usar de operaciones matemáticas, lógicas, ordenamiento, selección, E/S, álgebra lineal y estadística entre otras, *pandas* para el análisis de los datos procesados y las series de tiempo de la señal, *matplotlib* para el graficado de las señales *EEG*, *seaborn* para la visualización de los gráficos estadísticos, de la biblioteca de aprendizaje automático *scikit-learn* denominada *sklearn* las librerías *LinearDiscriminantAnalysis* que es la encargada de realizar la clasificación mediante el *Análisis discriminante lineal de Fisher* o *Fisher's Linear Discriminant Analysis (FLDA)*, la *LabelEncoder* que normalizará las etiquetas de las distintas señales *EEG* graficadas, y la *accuracy_score* que brindará un puntaje de precisión en la clasificación *multi-etiqueta* o coincidencia con respecto a un subconjunto de etiquetas *EEG* a comprar de una muestra de serie de tiempo de la *EEG*.

Para lograr el reconocimiento de patrones y aprendizaje automático de un conjuntos de datos adquiridos por el sistema *pre-procesamiento DsPIC* a la PC en *Python* se presenta el problema de lectura y almacenamiento de alta dimensión (variables); es por lo que el análisis del aprendizaje utilizando proyecciones de datos no adaptativas es de gran utilidad con técnicas como la *FLDA* y librerías para agilizar el trabajo como *LinearDiscriminantAnalysis* en *Python*.

Descritas las señales *EEG* a clasificar en Delta, Theta, Alpha, Beta y Gamma como patrones de comparación; se utilizó el *FLDA* con valores de los datos *EEG* de una Gaussiana con varianza finita y media cero con límites en error de clasificación [33] para ser reconocidos como formas de onda específicas para cuando se entrenaba para los comandos mentales de “arriba”, “abajo”, “izquierda”, “derecha”, “gripper abierto” y “gripper cerrado”. El sistema de aprendizaje colocará los pesos a cada tipo de frecuencia que vaya formando el patrón de señal evocada. Se descartaron *de* y *th* al aparecer demasiado parecidas por el sistema de *machine learning*. El sistema caracterizó con amplitud, frecuencia, forma de onda, picos y ventanas. El diagrama de bloques del sistema se muestra en la figura 5.

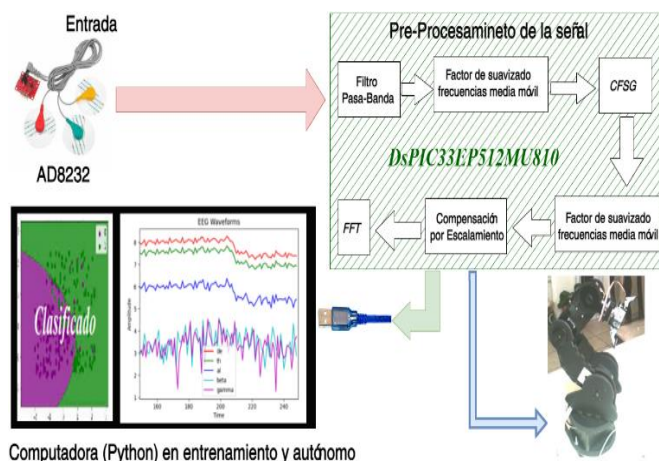


Fig. 5 diagrama de bloques del sistema

El sistema manufacturado incorporó una versión 2.0 del manipulador *Mathbot* [16] con un gripper de mayor precisión como se muestra en la figura 6.



Fig. 6 Manufactura del BCI mediante el AD832- DSPIC y Mathbot.

Después de su manufactura del prototipo se realizó una *interfaz gráfica de usuario (GUI)* que permitía graficar las señales para que el operado también fuera acondicionado mediante una retroalimentación en tiempo real del comportamiento del módulo de procesamiento respecto a sus comandos mentales, como se muestra en la figura 7.

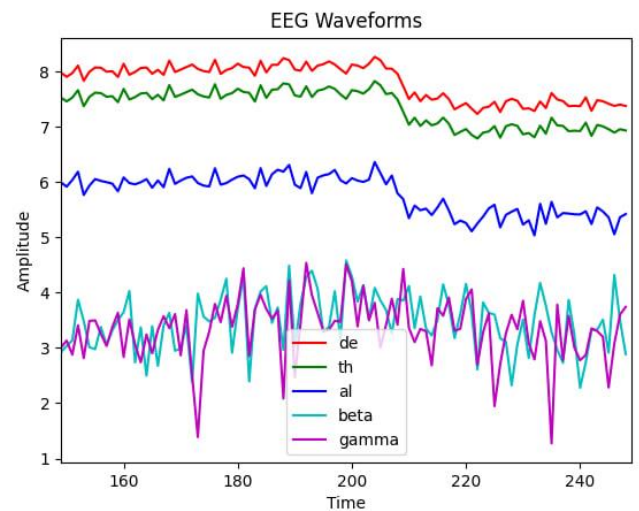


Fig. 7 GUI del sistema que grafica las formas de onda *EEG* descritas en el trabajo

VI. RESULTADOS.

Se procedió a un entrenamiento mediante el sistema de *machine learning* mediante caracterización donde el sistema de aprendizaje detectaba las señales respecto a lo deseado; es decir el operador pensaba en un comando a realizar por el robot en varias ocasiones para que el sistema obtuviera las características más destacadas, como se describió en (1), (2), (3), (4), (5), (21), (29) y (35).

El experimento se realizó 500 ocasiones para cada comando utilizando rutinas de movimientos kinestésicos del operador para evocar a la misma señal *EEG* priorizando a las frecuencias importantes. Una vez caracterizadas las señales de referencia como en (29) se procedió a entrenar el sistema de forma inversa; es decir mientras se realizaban los movimientos kinestésicos la máquina enviaba comandos de texto del comando que detectaba con lo que el operador debía aprender a concentrar el pensamiento para formar la señal similar para que la señal entrara en el intervalo de referencia probabilístico, como se muestra en la figura 8.

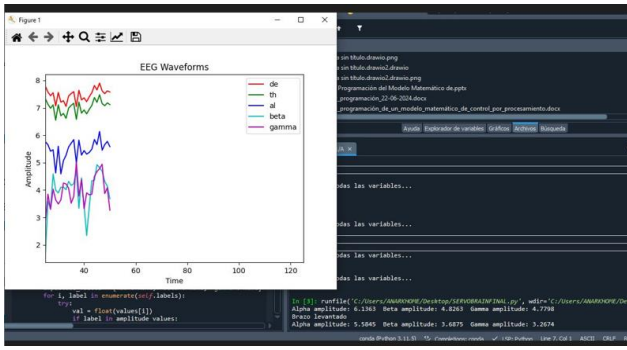


Fig. 8. Respuesta de entrenamiento

La tabla 1 describe una captura de pantalla de las que probablemente pueda interpretar con una categorización del patrón como verdadero para cada comando en un funcionamiento óptimo respecto a cada tipo de señal.

Tabla 1. Muestra de una señal caracterizada adecuadamente que respondió al estímulo del pensamiento del operador con sus porcentajes de relevancia generados por el algoritmo de machine learning con base a los errores de entrenamiento.

Muestra EEG ventana de caracterización.	Comando	Ondas relevantes	Estadísticas favorables de 1000
	Brazo levantado	Alpha (60%) Beta (15%) Gamma(15%)	72%
	Giro 1	Alpha (20%) Beta (15%) Gamma(15%)	86%
	Giro 2	Alpha (20%) Beta (15%) Gamma(15%)	81%
	Tomar	Alpha (20%) Beta (50%) Gamma(30%)	89%
	Soltar	Alpha (10%) Beta (40%) Gamma(60%)	94%
	Brazo abajo	Alpha (40%) Beta (20%) Gamma(40%)	68%

Las estadísticas favorables de 1000 pruebas fueron almacenadas en la fase de entrenamiento del operador una vez que el sistema estaba entrenado. Las señales delta y theta del modelo matemático fueron descartadas de la programación debido a la similitud que presentaban en el entrenamiento del machine learning reprogramando y agilizando los tiempos de procesamiento de clasificado.

El presente artículo y prototipo fueron presentado como ponencia en el CIOOM 2024 los días 14 y 15 de marzo de 2024 en las instalaciones de la biblioteca Vasconcelos y en el sitio www.cioom.org en donde se manipuló el robot mediante 6 comandos mentales, como se muestra en la figura 9.



Figura 9. Demostración física del prototipo en el 1er Congreso Internacional de Objetos y Objetivos Matemáticos 2024.

VII. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

El artículo presenta los resultados de desarrollar un BCI mediante un sistema de adquisición de un *sistema de adquisición de señales Biopotenciales* [19] mediante la compensación por software mediante un *DSP*, obteniendo resultados similares en los resultados de control de comandos a los encontrados por otros autores que utilizaron productos comerciales como los adquiridos previamente [17] [18].

Se requiere un estudio separado con distintos operadores para saber el paradigma de evocación de señales utilizado; se hipotetiza que es una mezcla de *SSVEP*, *ERP* y *MI* [13], ya que en el entrenamiento el operador veía las señales *EEG* en pantalla y su propio brazo realizando el movimiento, además de verbalizar el comando para aprender la rutina kinestésica haciendo un *ERP*. También se generaba mentalmente la respuesta motora *MI* sin el movimiento de rutina kinestésica para que el sistema se entrenara sin movimientos.

Los factores de distracción como ruidos o estímulos visuales pueden provocar un ruido en la evocación mental del operador que incluso puede provocar la activación de un comando erróneo que no sucedía sin distractores.

Se descartaron señales *EEG* que se comportaban de forma similar para el sistema de machine learning logrando optimizar el reconocimiento de patrones.

El *Digital Signal Controller DSC* de *Microchip dsPIC33EP512MU810* [22] permitió realizar las labores del *BCI* de *pre-procesamiento*, ganancia, filtrado y otras; gracias a sus comandos propios de *DSP* además de manejar 5 *PWM* simultáneamente de los servomotores de *Mathbot* [16], lo que demostró que el *BCI* con el *DSC* descrito puede ser embebido al control de distintas máquinas como sillas de ruedas, domótica o control de *GUIs* de la computadora para navegar en un sistema operativo o navegadores web con posibilidades

ilimitadas, ya que el hardware permite salidas digitales, analógicas y comandos por distintos protocolos, siendo una mejor opción que las BCI comerciales mencionadas en ésta investigación.

Gracias al trabajo de Hindmarsh, Rose y Huxley [24] y sus ecuaciones (1),(2) y (3) se pudieron modelar los consecuentes módulos, al ser condiciones necesarias para las ecuaciones posteriores para el modelado del sistema.

El factor de cresta para la clasificación de señales (CFSG) [25] en la ecuación (5) permitió clasificar las formas de onda en el *pre-procesamiento* y fue utilizado como factor en los siguientes modelos como requerimiento necesario para que se llevaran a cabo las siguientes ecuaciones.

El fraccionamiento por *ventanas de muestreo* [28] permitieron generar fracciones de tiempo de las señales continuas detectando *espigas* y fue utilizado por el DPIC para la FFT en comandos de *Windowing-blackman* y *Windowing-forward* clasificando la serie de señales neuronales además de los umbrales de superación de espigas de referencia [29].

El DSP fungió como BCI utilizando la FFT como sistema de conversión compleja a magnitud con una frecuencia de muestreo de 1 milisegundo utilizando (21).

El clasificador generativo permitió el modelado de los datos de entrenamiento y el límite óptimo para toma de decisión entre clases de comandos o señales como se describe en la tabla 1 que describe algunos patrones conocidos aprendidos por entrenamiento.

Al usar una clasificación óptima iterativa por el teorema de Bayes para cada tipo de señal se modeló la probabilidad general en (35).

Es de interés el factor de convergencia de los valores (1), (2), (3), (4), (5) mediante (29) y las ecuaciones derivadas hacia σ .

La clasificación en Python mediante el FLDA [32] y comandos especializados como *LinearDiscriminantAnalysis* fue de gran ayuda para formar una memoria de señales similares para cada comando del operador al robot obteniendo los errores de clasificación a través de un sistema de aprendizaje prueba y error con el operador para acondicionar posteriormente al operador al sistema entrenado mediante valores EEG de una *sub-Gaussiana* con varianza finita y media cero con límites en error de clasificación [33] mediante el error de clasificación que se produce en caso de que el clasificador no aprenda usando (29).

Mediante Python y LabelEncoder se normalizaron las etiquetas de las distintas señales EEG graficadas dando estadísticas con *accuracy_score*.

Los sistemas BCI de EEG si bien permiten el *neurocontrol* de máquinas; éste sigue siendo un sistema de lazo abierto pese a que el operador pueda ver el comportamiento del sistema o una GUI que indique como se comportan sus señales para que adapte sus comandos mentales. Por lo anterior; el neurooperador de una máquina debería dar una secuencia de comandos mentales distintos *a,b,c...* con una retroalimentación por parte del sistema después de cada comando de modo *a',b'c'...*, así como la opción de borrado y retroceso en la secuencia, para el aseguramiento de la orden por la máquina evitando "*comandos falsos*" y errores que activen la máquina.

Un BCI de siguiente generación debería retroalimentar al usuario mediante un estímulo eléctrico o internamente mediante una interfaz de estimulación neuronal por comandos

de voz para confirmar operaciones y aseguramiento de comandos.

Los BCI necesariamente deben ser de lazo cerrado por seguridad.

REFERENCIAS

- [1] J. D. Bronzino and D. R. Peterson, *Principles of electroencephalography*, in *Biomedical Engineering Fundamentals*, CRC Press, 2006, pp. 445-456.
- [2] A. Alpi et al., *Plant neurobiology: no brain, no gain? Trends in Plant Science*, vol. 12, no. 4, pp. 135-136, 2007.
- [3] R. Fazel-Rezai, Ed., *Brain-Computer Interface Systems: Recent Progress and Future Prospects*, 2013.
- [4] H. A. Shedeed, M. F. Issa, and S. M. El-Sayed, *Brain EEG signal processing for controlling a robotic arm*, in *2013 8th International Conference on Computer Engineering & Systems (ICCES)*, IEEE, November 2013, pp. 152-157.
- [5] Z. T. Al-Qaysi, B. B. Zaidan, A. A. Zaidan, and M. S. Suzani, *A review of disability EEG based wheelchair control system: Coherent taxonomy, open challenges and recommendations*, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, vol. 164, pp. 221-237, 2018.
- [6] G. Wu and Z. Xie, *Development of a mind-controlled Android racing game using a brain computer interface (BCI)*, in *2014 4th IEEE International Conference on Information Science and Technology*, pp. 652-655, April 2014.
- [7] *CMU Engineering*, Carnegie Mellon University, June 20, 2019. [Online]. Available: <https://engineering.cmu.edu/news-events/news/2019/06/20-he-sci-robotics.html>. Accessed: Jan. 1, 2024.
- [8] A. Nourmohammadi, M. Jafari, and T. O. Zander, *A survey on unmanned aerial vehicle remote control using brain-computer interface*, *IEEE Transactions on Human-Machine Systems*, vol. 48, no. 4, pp. 337-348, 2018.
- [9] E. Bharucha, H. Seprehrian, and B. Gosselin, *A survey of neural front end amplifiers and their requirements toward practical neural interfaces*, *J. Low Power Electronics Applications*, vol. 4, pp. 268-291, 2014.
- [10] D. S. Ruchkin and E. M. R. Glaser, *Principles of Neurobiological Signal Analysis*, Academic Press, 1976.
- [11] T. Jochum, T. Denison, and P. Wolf, *Integrated circuit amplifiers for multi-electrode intracortical recording*, *J. Neural Eng.*, vol. 6, pp. 1-26, 2009.
- [12] M. Teplan, *Fundamentals of EEG measurement*, *Meas. Sci. Rev.*, vol. 2, no. 2, pp. 1-11, 2002.
- [13] Y. E. Lee et al., *Mobile BCI dataset of scalp-and ear-EEGs with ERP and SSVEP paradigms while standing, walking, and running*, *Scientific Data*, vol. 8, no. 1, p. 315, 2021.
- [14] S. Aggarwal and N. Chugh, *Review of machine learning techniques for EEG based brain computer interface*, *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 29, no. 5, pp. 3001-3020, 2022.
- [15] M. A. Lopez-Gordo, D. Sanchez-Morillo, and F. P. Valle, *Dry EEG electrodes*, *Sensors*, vol. 14, no. 7, pp. 12847-12870, 2014.
- [16] M. Fajardo-Rendón, *Diseño y construcción de un manipulador industrial de cinco grados de libertad: Modelado matemático y análisis del efector final*, *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no. 1, July-December 2019.

- [17] *Emotiv Insight*, Emotiv, November 20, 2023. [Online]. Available: <https://www.emotiv.com/products/insight>. Accessed: Nov. 20, 2023.
- [18] *Neurosky*, Neurosky. [Online]. Available: <https://store.neurosky.com/>. Accessed: Nov. 10, 2023.
- [19] Analog Devices Inc., *AD8232 datasheet*, [Online]. Available: <https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ad8232.pdf>. Accessed: Dec. 13, 2023.
- [20] J. J. A. Mendes Junior et al., *AD8232 to biopotentials sensors: Open source project and benchmark*, *Electronics*, vol. 12, no. 4, p. 833, 2023.
- [21] Samson, V. R. R., Bharath Sai, U., Pradeep Kumar, S., Praveen Kittu, B., Suresh Babu, D., Madhuri, G. M. G., ... & Kedar Eswar, K. *Human Hand Controlled by Other Human Brain. Recent Findings in Intelligent Computing Techniques: Proceedings of the 5th ICACNI 2017*, Springer Singapore vol. 2, pp. 451-458, 2018.
- [22] *Microchip DSPIC33EP512MU810*, Microchip Technology. [Online]. Available: <https://www.microchip.com/en-us/product/dspic33ep512mu810>. Accessed: Oct. 10, 2023.
- [23] M. Fajardo-Rendón and F. G. Herrera-Armendia, *Servocontrolador Reprogramable para Articulaciones Robóticas USB HID*, in *Memorias del IEEE X Congreso Internacional Sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico: CIINDET IEEE*, Cuernavaca, Morelos, México, pp. 54-70, 2013.
- [24] J. L. Hindmarsh, R. M. Rose, and A. F. Huxley, *A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations*, *Proc. R. Soc. Lond. B*, vol. 221, no. 1222, pp. 87-102, Mar. 1984.
- [25] J. Ojarand and M. Min, *Recent advances in crest factor minimization of multisine*, *Elektronika ir Elektrotechnika*, vol. 23, no. 2, pp. 59-62, 2017.
- [26] J. P. Eckmann and P. Wittwer, *A complete proof of the Feigenbaum conjectures*, *J. Stat. Phys.*, vol. 46, pp. 455-475, 1987.
- [27] G. G. V. Equihua, *Desarrollo de un arreglo de neuronas electrónicas con aplicaciones en sincronización de sistemas* Tesis de Maestría, Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, 2018.
- [28] Gray, R. M., & Goodman, J. W., *Fourier transforms: an introduction for engineers (Vol. 322)*, Springer Science & Business Media. 2012.
- [29] R. Rinaldo, G. Cortelazzo, and G. A. Mian, *Techniques for the efficient evaluation of two-dimensional autocorrelation functions*, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, no. 11, pp. 2854-2857, Nov. 1992. doi: 10.1109/78.165679.
- [30] R. N. Youngworth, B. B. Gallagher, and B. L. Stamper, *An overview of power spectral density (PSD) calculations*, in *Proc. SPIE 5869, Optical Manufacturing and Testing VI*, 58690U, Aug. 2005. doi: 10.1117/12.618478.
- [31] R. C. Sine, *On nonlinear contraction semigroups in sup norm spaces*, *Nonlinear Anal.*, vol. 3, no. 6, pp. 885-890, 1979.
- [32] R. A. Fisher, *The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems*, *Ann. Eugenics*, vol. 7, no. 2, pp. 179-188, 1936. doi: 10.1111/j.1469-1809.1936.tb02137.x. hdl:2440/15227.
- [33] T. Pattison, D. Gossink, *Misclassification Probability Bounds for Multivariate Gaussian Classes*, *Digital Signal Processing*, vol. 9, no. 4, pp. 280-296, 1999.
- [34] J. J. Dolado, J. Andrés, and R. Domenech, *Inferencia en modelos dinámicos uniecuacionales con variables integradas*, Federación Valenciana de Cajas de Ahorros, Servicio de Estudios, 1990.
- [35] K. Doherty, R. G. Adams, and N. Davey, *Non-Euclidean norms and data normalisation*, in *Proceedings of the European Symposium on Artificial Neural Networks ESANN'2004, Bruges (Belgium), 28-30 April 2004*, d-side publications, pp. 181-186, 2004.
- [36] Jacobs, K., & Jacobs, K. *Independent identically distributed (iid) random variables*, *Discrete Stochastics*, 65-101, 1992.

Estudio de la trayectoria de tres cuerpos celestes por medio de un modelado matemático con base en el sistema de evolutas.

Jaime William Flores Tecalco

*Escuela Secundaria No.224 Huetzalin, C. Pino S/N, Guadalupe, Xochimilco, 16860 Ciudad de México, CDMX.

*Estudiante de Maestría, Universidad del Valle de México (UVM), Sadi Carnot 57, San Rafael, Cuauhtémoc, 06470 Ciudad de México, CDMX

william10_511@hotmail.com

Resumen- En este artículo se da a conocer el principio de una propuesta algebraica de cómo se puede comenzar a abordar el Problema de los tres cuerpos celestes a través de un modelado de transformaciones orbitales por medio de un sistema de evolutas.

Palabras clave- Cuerpos celestes, tres cuerpos, dos cuerpos, gravedad, órbitas, sistemas, evolutas, modelo.

Abstract- This article beginning of an algebraic proposal is revealed as to how we can begin to address the Problem of the three celestial bodies through modeling of orbital transformations through an involute system.

Keywords- Celestial bodies, three bodies, two bodies, gravity, orbits, systems, evolutes, model.

Subject Classification: 11Axx

I. INTRODUCCIÓN

El Problema de los tres cuerpos ha sido el objeto de múltiples investigaciones a través del tiempo debido al interés de explicar el movimiento y comportamiento de nuestros cuerpos celestes. Este problema es enigmático; ya que sigue sin resolverse y apareció posteriormente que Newton pudo resolver el problema de los dos cuerpos para la órbita de la luna alrededor de nuestro planeta [1].

En este artículo se da a conocer el principio de una propuesta teórica algebraica de cómo se puede comenzar a abordar el Problema de los tres cuerpos celestes a través de un modelado de transformaciones orbitales por medio de un sistema de evolutas. Para ello se comienza a trabajar el Problema de los dos cuerpos para poder así aumentar un cuerpo más y analizar su comportamiento.

La mayor parte de este proceso se ha desarrollado de una manera algebraica, utilizando lo menos posible algún software de simulación debido a la complejidad en la extrapolación de expresiones y ecuaciones que se verán a continuación.

II. PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

En un sistema aislado de dos cuerpos que interactúan a través de un potencial central, las ecuaciones de movimiento se reducen a: [2]

$$m_1 \ddot{r}_1 = F_{21} \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{r}_2 = F_{12} \quad (2)$$

En la Proposición Gravitacional de Newton [11] se observa esta relación donde dos cuerpos interactúan a través de una energía potencial dada por:

$$U_{12}(|r_1 - r_2|) = U_{21}(|r_2 - r_1|) = G \frac{m_1 m_2}{|r_1 - r_2|^2} \quad (3)$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2} \quad (4)$$

Debido a que la interacción de los dos cuerpos es por medio de un potencial central, las dos fuerzas se rigen por la tercera proposición de Newton [11] conservando el impulso total de la resultante del sistema por lo que se considera ahora el centro de masa R [2].

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{M} \quad (6)$$

Y la derivada respecto al tiempo está dada por la velocidad V del centro de masa CM .

$$V_{CM} = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{M} \quad (7)$$

La aceleración a del CM depende de la fuerza externa neta F_{ext} .

$$F_{ext} = M a_{CM} \quad (8)$$

Debido a que nuestro sistema de dos cuerpos es aislado, la a_{CM} debe ser cero lo que implica que la V_{CM} debe ser constante.

$$V_{CM}^{(0)} = \frac{m_1 V_1^{(0)} + m_2 V_2^{(0)}}{M} \quad (9)$$

Entonces el movimiento $R(t)$ del CM esta dado por:

$$R(t) = V_{CM}^{(0)} t \quad (10)$$

el cuál nos ayudará a definir el vector de distancia relativa r .

$$r = r_1 - r_2 \quad (11)$$

Escribiendo la ecuación (11) en función de r_1 y r_2 se obtiene:

$$r_1 = r + r_2 \quad (12)$$

$$r_2 = r - r_1 \quad (13)$$

Utilizando la ecuación (5) se pueden reescribir las ecuaciones (12) y (13) como:

$$r_1 = R + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad (14)$$

$$r_2 = R - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \quad (15)$$

La ecuación de movimiento en función de r se encuentra por medio de las ecuaciones originales de movimiento (1) y (2) al ser multiplicadas por las masas m_1, m_2 [2].

$$m_1 m_2 \ddot{r}_1 = m_2 F_{21} \quad (16)$$

$$m_1 m_2 \ddot{r}_2 = m_1 F_{12} \quad (17)$$

Y al restarse obtenemos:

$$m_1 m_2 (\ddot{r}_1 - \ddot{r}_2) = m_2 F_{21} - m_1 F_{12} \quad (18)$$

Al ser aplicada la tercera ley de Newton [2]

$$\frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1} \ddot{r} = F_{21} \quad (19)$$

Las fuerzas se derivan de un potencial central que únicamente depende de la distancia entre los dos cuerpos, se tiene que [2]:

$$F_{21} = -\frac{\partial}{\partial r_1} U_{12}(|r_2 - r_1|) \quad (20)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r_1} U_{12}(|r_2 - r_1|) = \nabla_1 U_{12}(|r_2 - r_1|) \quad (21)$$

Se utiliza la regla de la cadena para la componente x de la derivada debido a que el potencial solo depende de r .

$$\frac{\partial}{\partial r_{1x}} U_{12}(|r|) = \frac{\partial r_x}{\partial r_{1x}} \frac{\partial}{\partial r_x} U_{12}(|r|) + \frac{\partial R_x}{\partial r_{1x}} \frac{\partial}{\partial R_x} U_{12}(|r|) \quad (22)$$

$$\frac{\partial r_x}{\partial r_{1x}} \frac{\partial}{\partial r_x} U_{12}(|r|) + \frac{\partial R_x}{\partial r_{1x}} \frac{\partial}{\partial R_x} U_{12}(|r|) = \frac{\partial}{\partial r_x} U_{12}(|r|) \quad (23)$$

Las demás coordenadas se pueden encontrar de la misma manera y por tanto se tiene que:

$$m_* \ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r} U(|r|) \equiv F(r) \quad (24)$$

Donde m_* es la masa reducida del sistema.

$$m_* = \frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1} \quad (25)$$

Por lo tanto, el problema de los dos cuerpos se reduce a un sistema de un solo cuerpo o una sola partícula. Sin embargo, con esta reducción se debe reformular en función del momento angular L de este cuerpo [3].

$$L = m_* r \times v; v = \dot{r} \quad (26)$$

Al utilizar la regla de la cadena se tiene

$$F(r) = -\frac{\partial}{\partial r} U(|r|) = -\frac{r}{r} \frac{dU(r)}{dr}; r = |r| \quad (27)$$

Y también el momento de torsión τ sobre el cuerpo está dado por [3]:

$$\tau = r \times F \propto r \times r = 0 \quad (28)$$

El momento de torsión τ es cero debido a que la fuerza es paralela al vector de desplazamiento, lo que implica que el momento angular del cuerpo sea constante para el movimiento de una partícula en un potencial central externo.

$$\frac{d}{dt} L = 0 \quad (29)$$

Para este sistema, teniendo tres vectores a, b, c se puede escribir un triple producto escalar que implica una relación de productos con la masa reducida del sistema.

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) \quad (30)$$

$$r \cdot L = m_* r \cdot (r \times v) = m_* v \cdot (r \times r) = 0 \quad (31)$$

Al observar la ecuación anterior, r es perpendicular al momento angular L , por tanto, L es constante lo que implica la existencia de un vector fijo en el espacio al cual el vector de posición r es perpendicular y lo hace ubicarse en un plano reduciendo el problema a dos dimensiones por lo que es conveniente trabajar en coordenadas polares [2].

$$r_x = r \cos \theta \quad (32)$$

$$r_y = r \sin \theta \quad (33)$$

Si el cuerpo o la partícula viaja en la dimensión xy , el momento angular L está orientado en el eje z , por lo tanto:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{m_* r^2} \quad (34)$$

$$l \equiv |L| \quad (35)$$

Se observa que $\frac{d\theta}{dt}$ al ser positivo, el cuerpo o la partícula gira alrededor del centro del sistema de coordenadas con la misma dirección. También se observa que el movimiento se describe en términos de una función de energía potencial que debe conservarse [2].

$$E = \frac{1}{2} m_* v^2 + U(r) \quad (36)$$

Y al trabajar en coordenadas polares tenemos

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \quad (37)$$

Por lo tanto

$$E = \frac{1}{2} m_* \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_* r^2 \dot{\theta}^2 + U(r) \quad (38)$$

$$E = \frac{1}{2} m_* \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_* r^2 \left(\frac{l}{m_* r^2} \right)^2 + U(r) \quad (39)$$

$$E = \frac{1}{2} m_* \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{m_* r^2} + U(r) \quad (40)$$

Si se define el potencial efectivo como

$$U_{eff}(r) = \frac{1}{2} \frac{l^2}{m_* r^2} + U(r) \quad (41)$$

Entonces

$$E = \frac{1}{2}m_*\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \quad (42)$$

Se nota que $U_{eff}(r)$ es una función de r por lo que la función anterior es la representación de una partícula en una sola dimensión de coordenada r cuya energía es la suma de su energía cinética K y también su energía potencial a través del potencial efectivo desarrollando un sistema de una dimensión [2].

$$K = \frac{1}{2}m_*\dot{r}^2 \quad (43)$$

Por lo mismo, el sistema se determina por las ecuaciones

$$E = \frac{1}{2}m_*\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \quad (44)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{m_*r^2} \quad (45)$$

Al resolver la primera ecuación y determinar la forma funcional de $r(t)$, se encuentra la coordenada angular al integrar.

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{l}{m} \int_0^t \frac{dt'}{r^2(t')} \quad (46)$$

Entonces un sistema de dos partículas en un espacio tridimensional se ha reducido al problema de encontrar el movimiento de una partícula que viaja en una dimensión, al combinar el momento lineal, momento angular y conservación de energía del sistema, al solo localizar la posición y la velocidad de una partícula unidimensional [3].

En el caso que un cuerpo sea masivo a comparación del otro, por ejemplo, sea m_2 el cuerpo masivo, entonces la masa reducida se convierte:

$$m_* = \frac{m_1m_2}{m_2 + m_1} \approx m_1 \quad (47)$$

Y el centro de masa

$$R = \frac{m_1r_1 + m_2r_2}{m_1 + m_2} \approx r_2 \quad (48)$$

Y el vector de distancia relativa r simplemente define la posición de la masa más pequeña con respecto a la posición de la masa más grande, que es el centro de masa mismo.

$$r = r_1 - r_2 \approx r_1 - R \quad (49)$$

Se puede considerar que la masa mayor m_2 es estacionaria (ya que el centro de masa se mueve con una velocidad constante por lo que puede considerarse cero), y la masa más pequeña m_1 esté sujeta a un potencial externo debido a esta masa mayor m_2 .

III. SISTEMA SIMPLIFICADO DE DOS CUERPOS

Se puede describir un sistema simplificado mediante un vector de posición r en un plano a través del potencial externo $U(r)$. Los vectores de posición de dos cuerpos en función del centro de masa R son:

$$r'_1 = r_1 - R = \frac{m_2}{m_1 + m_2}r \quad (50)$$

$$r'_2 = r_2 - R = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}r \quad (51)$$

El centro de masa R está situado en el origen de un plano de coordenadas de donde r'_1 y r'_2 son vectores de posición de m_1 y m_2 .

Se observa que r posee distinta longitud que los vectores de posición r'_1 y r'_2 ya que solo proporciona la orientación adecuada. El vector r está direccionado del origen al primer cuerpo y el vector $-r$ está direccionado del origen al segundo cuerpo.

Los factores

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{M} \quad (52)$$

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M} \quad (53)$$

son escalares de r para obtener los vectores de posición.

Cuando un cuerpo, por ejemplo m_2 , sea un cuerpo masivo a comparación del otro cuerpo se tiene que:

$$m_2 \gg m_1 \rightarrow r'_1 \approx r \wedge r'_2 \approx 0 \quad (54)$$

El momento angular total en el sistema de coordenadas del centro de masa se puede describir a partir del momento angular L (26) de un sistema de una partícula con masa m_* y sustituyendo los vectores de posición [3].

$$L = m_*r \times v \quad (55)$$

$$L = m_1r'_1 \times \dot{r}'_1 + m_2r'_2 \times \dot{r}'_2 \quad (56)$$

$$L = \frac{m_1m_2}{M^2}(m_2r \times \dot{r} + m_1r \times \dot{r}) \quad (57)$$

$$L = \frac{m_1m_2}{M^2}r \times \dot{r} \quad (58)$$

$$L = m_*r \times \dot{r} \quad (59)$$

Por lo tanto, (59) es el momento angular completo de dos cuerpos, evaluado en el marco del centro de masa.

La energía total del sistema de dos cuerpos en términos del centro de cantidades de masa E_{CM} se puede describir a partir de la energía potencial de un sistema de un cuerpo (42) [2].

$$E = \frac{1}{2}m_*\dot{r}^2 + U(r) \quad (60)$$

$$E_{CM} = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}'_2)^2 + U(r) \quad (61)$$

$$E_{CM} = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{M}\dot{r}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{M}\dot{r}\right)^2 + U(r) \quad (62)$$

Se observa que E_{CM} es equivalente a E .

IV. EVOLUTAS

Sea C una curva parametrizada por la longitud de arco l , entonces la representación paramétrica natural es [4]

$$\beta: \sigma = (x, y) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (63)$$

Definición 1.- Un vector tangente unitario de C en el punto $P = \beta(l)$ esta dado por: [4]

$$T(l) = \beta'(l) \quad (64)$$

Definición 2.- Una recta tangente de C en el punto P tiene como vector director a $T(l)$: [5]

$$r(\lambda) = P + \lambda T(l) \quad (65)$$

Definición 3.- Se denota a un vector de curvatura de C en el punto $P = \beta(l_0)$ como el vector: [4]

$$\beta''(l_0) \quad (66)$$

Definición 4.- Se denota una curvatura de flexión de C al módulo del vector de curvatura: [6]

$$\|\beta''(l_0)\| \quad (67)$$

Definición 5.- Se denota la función curvatura de C como: [6]

$$\phi: \sigma \rightarrow \mathbb{R} \quad (68)$$

$$\phi(l) = \|\beta''(l)\| \quad (69)$$

Definición 6.- Si $\phi(l_0) \neq 0$, se define el radio de curvatura de C como: [6]

$$\rho(l_0) = \frac{1}{\phi(l_0)} \quad (70)$$

Una curvatura se relaciona con la rapidez con la que se aleja de la curva C de la recta tangente en un punto P .

$$\beta''(l_0) = \lim_{l \rightarrow l_0} \frac{\beta'(l) - \beta'(l_0)}{l - l_0} \quad (71)$$

De donde $\phi(l_0)$ mide la tasa de cambio del ángulo que forma $T(l_0)$ con los vectores tangentes a C en puntos próximos a P .

Definición 7.- Se denota un vector normal de C en un punto $P = \beta(l)$ al vector unitario $N(l)$ en la dirección del vector de curvatura. [6]

$$N(l) = \frac{\beta''(l)}{\|\beta''(l)\|} = \frac{\beta''(l)}{\phi(l)} \quad (72)$$

Definición 8.- Se denota la recta normal de C en un punto $P = \beta(l)$ a la recta que contiene a P y tiene como vector director al vector normal $N(l)$ [6].

Definición 9.- Sea $\alpha: C \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva sin puntos de inflexión con una parametrización $\alpha(l) = (x(l), y(l))$. Se define la evoluta α_E de C como la curva con representación: [4][5]

$$\alpha_E(l) = \alpha(l) + \frac{1}{\phi(l)} N(l) \quad (73)$$

Definición 10.- Se denota plano osculador de C en un punto $P = \beta(l)$ al plano h que contiene a P y tiene como vectores directores a $T(l)$ y $N(l)$ [6].

Definición 11.- Se denota centro de curvatura $\delta(l)$ de C en un punto $P = \beta(l)$ al punto de la recta normal: [6]

$$\delta(l) = P + \rho(l)N(l) \quad (74)$$

Definición 12.- Se denota circunferencia osculatriz de C en un punto $P = \beta(l)$ a la circunferencia contenida en el plano osculador h con centro de curvatura $\delta(l)$ y radio de curvatura $\rho(l)$ [6].

Para cada $l_0 \in C$ la circunferencia osculatriz a la curva en $\alpha(l_0)$ tiene centro $\alpha_E(l_0)$ y radio $\rho = \frac{1}{\phi(l_0)}$. La evoluta α_E corresponde al

lugar geométrico de los centros de curvatura $\alpha(l)$ teniendo las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x_E(l) = x(l) - y(l) \frac{\dot{x}(l)^2 + \dot{y}(l)^2}{\dot{x}(l)\dot{y}(l) - \ddot{x}(l)\dot{y}(l)} \quad (75)$$

$$y_E(l) = y(l) - \dot{x}(l) \frac{\dot{x}(l)^2 + \dot{y}(l)^2}{\dot{x}(l)\dot{y}(l) - \ddot{x}(l)\dot{y}(l)} \quad (76)$$

$$\alpha_E(l) = \left(x(l) - y(l) \frac{\dot{x}(l)^2 + \dot{y}(l)^2}{\dot{x}(l)\dot{y}(l) - \ddot{x}(l)\dot{y}(l)}, \right. \\ \left. y(l) - \dot{x}(l) \frac{\dot{x}(l)^2 + \dot{y}(l)^2}{\dot{x}(l)\dot{y}(l) - \ddot{x}(l)\dot{y}(l)} \right) \quad (77)$$

V. ASTROIDE

Una cónica se define geoméricamente como el lugar de un punto que se mueve de modo que su distancia desde un punto fijo (el foco) es proporcional a su distancia desde una línea fija (la directriz); la curva es una parábola, una elipse o una hipérbola si la constante de proporcionalidad (la excentricidad e) es $1, < 1$ o > 1 respectivamente [4].

Sea la directriz $x = 0$ y el foco $F = (k, 0)$, entonces:

$$e = \frac{FP}{DP} \quad (78)$$

Donde $P = (x, y)$ es un punto en la cónica y $D = (0, y)$ está en la directriz. También:

$$FP = \sqrt{(x - k)^2 + y^2} \quad (79)$$

$$DP = |x| \quad (80)$$

Por eso

$$e = \frac{\sqrt{(x - k)^2 + y^2}}{|x|} \quad (81)$$

$$(1 - e^2)x^2 - 2kx + y^2 + k^2 = 0 \quad (82)$$

Así, cualquier ecuación algebraica de segundo grado representa una cónica (incluidas las formas degeneradas) [4].

Definición 13.- La elipse es una cónica con excentricidad e | $0 < e < 1$. También se puede definir como el lugar geométrico de un punto P tal que la suma de las distancias desde P a dos puntos fijos (focos) es constante [4][5].

El centro de la elipse es el punto medio del segmento de línea que une los focos. Al igual que ocurre con la parábola, existen dos tipos estándar. Al elegir el eje x para que coincida con la línea que une los focos y se puede elegir que el origen esté en el centro (forma uno) o en un foco (forma dos).

Sea una elipse ε con excentricidad e , $\exists a, b \in \varepsilon$ talque:

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (83)$$

Y $(\pm ae, 0)$ los focos de la elipse ε con $P = (x, y) | P \in \varepsilon$. Entonces

$$\sqrt{(x - ae)^2 + y^2} + \sqrt{(x + ae)^2 + y^2} = 2a \quad (84)$$

Para la forma uno se tiene la ecuación cartesiana: [4]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (85)$$

Y para la forma dos se realiza la sustitución $x' = x + ae$:

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (86)$$

La forma paramétrica se obtiene a partir de la definición:

$$\tan t = \frac{a}{b} \tan \theta \quad (87)$$

Pero si

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (88)$$

$$y^2 = (a^2 - x^2) \frac{b^2}{a^2} \quad (89)$$

Entonces

$$\tan t = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{x^2}} \quad (90)$$

Pero

$$\tan^2 t = \sec^2 t - 1 \quad (91)$$

Entonces

$$\cos t = \frac{x}{a} \quad (92)$$

Obteniendo las ecuaciones paramétricas de la forma uno:

$$\begin{cases} x = a \cos t; & -\pi \leq t \leq \pi \\ y = b \sin t; & -\pi \leq t \leq \pi \end{cases} \quad (93)$$

Y las ecuaciones paramétricas de la forma dos:

$$\begin{cases} x = a \cos(t - e); & -\pi \leq t \leq \pi \\ y = b \sin t; & -\pi \leq t \leq \pi \end{cases} \quad (94)$$

Definición 14.- Una hipotrocoide es una curva cíclica trazada por un punto P adjunto a un círculo S que rota dentro de un círculo fijo C [4].

El círculo C con radio a tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (95)$$

Y el círculo S con radio b para un parámetro $t = 0$ tiene por ecuación

$$(x - n)^2 + y^2 = b^2 \quad (96)$$

Donde n es la diferencia de los radios

$$n = a - b \quad (97)$$

El valor de P para $t = 0$ es

$$P_0 = (n - h, 0) \quad (98)$$

Donde h representa la distancia de P al centro de S que definimos como \hat{o} .

Cuando S rota alrededor de C crea un punto de contacto definido por:

$$C = (a \cos t, a \sin t) \quad (99)$$

Por lo que tenemos

$$P = \hat{o} + h(\cos \beta, -\sin \beta) \quad (100)$$

De donde β es el ángulo $A\hat{o}P$, A es un lado arbitrario para formar el ángulo β cuya intersección con el círculo S es el punto R ; por lo que

$$\hat{o} = n(\cos t, \sin t) \quad (101)$$

Entonces

$$P = n(\cos t, \sin t) \quad (102)$$

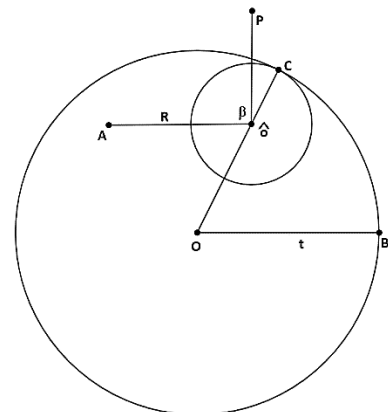


Fig. 1.- Rectas de una hipotrocoide.

Si el ángulo $0\hat{o}A = t$ y el ángulo $\text{arc } BC = \text{arc } RC$ entonces

$$at = b\hat{t} \quad (103)$$

$$\hat{t} = \angle 0\hat{o}P \quad (104)$$

Y también

$$\beta = \hat{t} - \angle 0\hat{o}A = \frac{a}{b}t - t = \frac{n}{b}t \quad (105)$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la hipotrocoide en $-\pi \leq t \leq \pi$ son: [4][5]

$$\begin{cases} n \cos t + h \cos \frac{n}{b}t \\ n \sin t - h \sin \frac{n}{b}t \end{cases} \quad (106)$$

Definición 15.- Una hipocicloide es una hipotrocoide con $h = b$, sus ecuaciones paramétricas en $-\pi \leq t \leq \pi$ son: [4][5]

$$\begin{cases} n \cos t + b \cos \frac{n}{b}t \\ n \sin t - b \sin \frac{n}{b}t \end{cases} \quad (107)$$

Si $\frac{n}{b}$ es racional la curva es algebraica y unicursal, de lo contrario es trascendental. La curva tiene $\frac{n}{b} + 1$ vértices si $\frac{n}{b}$ es entero [4].

Definición 16.- Un astroide es una hipocicloide con cuatro vértices, sus ecuaciones paramétricas en $-\pi \leq t \leq \pi$ son: [4]

$$\begin{cases} x = a(3 \cos t + \cos 3t) \\ y = a(3 \sin t - \sin 3t) \end{cases} \quad (108)$$

Las cuales también se pueden escribir como: [5]

$$\begin{cases} x = 4a \cos^3 t \\ y = 4a \sin^3 t \end{cases} \quad (109)$$

Y sus ecuaciones cartesianas se pueden representar como:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (110)$$

Que al ser expandida se tiene como resultado:

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0 \quad (111)$$

Y al ser vista de una forma podal se tiene

$$r^2 = a^2 - 3p^2 \quad (112)$$

VI. PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

El problema de los tres cuerpos, como lo planteó Hilbert, se puede enunciar como: Sean tres partículas que se mueven en el espacio bajo su atracción gravitacional mutua; dadas sus condiciones iniciales, determine su movimiento posterior [7].

Como se observó en la sección anterior, en el movimiento de dos cuerpos se encuentran soluciones que implican un movimiento en órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas, las primeras de las cuales constituyen órbitas cerradas, sin embargo, para casi todos los demás potenciales centrales, las ecuaciones de movimiento no se pueden integrar y cuando se suma una o más masas se vuelven muy complejas las matemáticas ya que se convierte en un problema no lineal sin una solución similar.

Sea P_i la representación de tres cuerpos o partículas con masas m_i a distancias $P_iP_j = r_{ij}$ y coordenadas $q_{ij}(i, j = 1,2,3)$ en un sistema de coordenadas inercial; las ecuaciones de sus movimientos están definidas por: [7][8]

$$\frac{d^2q_{1i}}{dt^2} = k^2m_2 \frac{(q_{2i} - q_{1i})}{r_{12}^3} + k^2m_3 \frac{(q_{3i} - q_{1i})}{r_{13}^3} \quad (113)$$

$$\frac{d^2q_{2i}}{dt^2} = k^2m_1 \frac{(q_{1i} - q_{2i})}{r_{12}^3} + k^2m_3 \frac{(q_{3i} - q_{2i})}{r_{23}^3} \quad (114)$$

$$\frac{d^2q_{3i}}{dt^2} = k^2m_1 \frac{(q_{1i} - q_{3i})}{r_{13}^3} + k^2m_2 \frac{(q_{2i} - q_{3i})}{r_{23}^3} \quad (115)$$

Donde k es la constante de gravitación e $i = 1,2,3$. Por lo tanto, el problema se describe en nueve ecuaciones diferenciales cada una de segundo orden.

Si las unidades se eligen de manera que $k^2 = 1$, la fuerza de atracción entre las partículas i -ésima y j -ésima se convierten en $\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$ y el término correspondiente en la energía potencial se convierte en $-\frac{m_i m_j}{r_{ij}}$. Por tanto, la energía potencial U de todo el sistema está dada por

$$U = -\frac{m_2 m_3}{r_{23}} - \frac{m_3 m_1}{r_{31}} - \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \quad (116)$$

Y sea

$$P_{ij} = m_i \frac{dq_{ij}}{dt} \quad (117)$$

Con

$$H = \sum_{j,i=1}^3 \frac{P_{ij}^2}{2m_i} + V \quad (118)$$

Las ecuaciones toman la forma Hamiltoniana:

$$\frac{dq_{ij}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_{ij}} \quad (119)$$

$$\frac{dP_{ij}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_{ij}} \quad (120)$$

Convirtiéndose en un conjunto de 18 ecuaciones diferenciales de primer orden [7].

Si la ij -ésima ecuación de (113), (114) y (115) se multiplican por m_i se obtiene la siguiente representación de las ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^3 m_i \frac{d^2q_{ij}}{dt^2} = 0; j = 1,2,3 \quad (121)$$

Al ser (121) integrada dos veces se obtiene:

$$\sum_{i=1}^3 m_i q_{ij} = A_j t + B_j; j = 1,2,3 \quad (122)$$

De donde A_j y B_j son constantes de integración. Se observa que el centro de masa de las tres partículas permanece en reposo o se mueve uniformemente en el espacio en línea recta. Las seis constantes, al evaluar j , sirven para describir el movimiento del centro de masa en el sistema de coordenadas inercial arbitrario original y no desempeñan ningún papel en el movimiento de los cuerpos alrededor del centro de masa [8].

Si las ecuaciones (113), (114) y (115) se multiplican por $-q_{12}$, $-q_{22}$ y $-q_{32}$ respectivamente generando un segundo conjunto el cual también se multiplica, respetando el orden, por q_{11} , q_{21} y q_{31} se obtiene:

$$\sum_{i=1}^3 m_i q_{i1} \frac{d^2q_{i2}}{dt^2} - \sum_{i=1}^3 m_i q_{i2} \frac{d^2q_{i1}}{dt^2} = 0 \quad (123)$$

A partir de (123) con un cambio cíclico de variables y después al ser integradas se obtiene.

$$\sum_{i=1}^3 m_i \left(q_{i2} \frac{dq_{i3}}{dt} - q_{i3} \frac{dq_{i2}}{dt} \right) = C_1 \quad (124)$$

$$\sum_{i=1}^3 m_i \left(q_{i3} \frac{dq_{i1}}{dt} - q_{i1} \frac{dq_{i3}}{dt} \right) = C_2 \quad (125)$$

$$\sum_{i=1}^3 m_i \left(q_{i1} \frac{dq_{i2}}{dt} - q_{i2} \frac{dq_{i1}}{dt} \right) = C_3 \quad (126)$$

Las ecuaciones (124), (125) y (126) representan la conservación del momento angular del sistema y también muestran

que el momento angular de las tres partículas alrededor de cada eje de coordenadas es constante durante todo el movimiento [7].

Al relacionar las ecuaciones iniciales (113), (114) y (115) con (124), (125) y (126) se puede partir que:

$$\frac{\partial}{\partial q_{ij}} \left(\frac{1}{r_{ik}} \right) = - \frac{q_{kj} - q_{ij}}{r_{ik}^3} \quad (127)$$

Y las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como:

$$m_i \frac{d^2 q_{ij}}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial q_{ij}} \quad (128)$$

Ya que U es una función de coordenadas únicamente, al multiplicar por $\frac{dq_{ij}}{dt}$ se obtiene:

$$\sum_{i,j=1}^3 P_{ij} \frac{d^2 q_{ij}}{dt^2} = - \frac{dU}{dt} \quad (129)$$

Cuando (129) se integra se obtiene:

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{P_{ij}^2}{2m_i} = -U + C \quad (130)$$

De donde C es la constante de integración. Se observa que (130) es el Hamiltoniano [10]

$$H = C \quad (131)$$

El lado izquierdo de la ecuación es la energía cinética K del sistema, por lo tanto, la integral se puede expresar en la forma

$$K - F = C \quad (132)$$

La ecuación (132) representa la conservación de la energía [10].

Se pueden hacer dos reducciones más en el orden del sistema, el tiempo se puede eliminar utilizando una de las variables dependientes como variable independiente y en segundo lugar se puede realizar una reducción final mediante la llamada eliminación de los nodos [8].

Utilizando este método, (119) y (120) se reduce de un sistema de orden 18 hasta un sistema de orden 6. Este resultado puede ser generalizado para el problema de n cuerpos en el que las ecuaciones diferenciales constituyan un sistema de orden $6n$ pero sin resultados específicos [7].

VII. MODELADO CON EVOLUTAS

En este apartado se describe el comienzo de una propuesta de modelado con evolutas; específicamente se utiliza un sistema de tres astroides en un plano bidimensional que representen las órbitas de tres cuerpos interactuando entre sí.

Para este inicio de modelado se parte con la idea de trabajar una dimensión menos, es decir, pasamos de tres a dos dimensiones y se opta que la masa m_3 del tercer cuerpo sea infinitamente pequeña en comparación de los otros dos cuerpos, de tal manera que m_3 se mueve bajo la acción de m_1 y m_2 .

Se deben contemplar condiciones iniciales tales como que las unidades de distancia sean las mismas que las distancias constantes

entre los cuerpos, la constante de gravitación tienda a 1 y las unidades de tiempo correspondan de tal manera que m_1 y m_2 tengan una velocidad angular $\omega = 1$ cumpliendo la tercera Ley de Kepler [2]:

$$\omega^2 |m_1 m_2|^3 = g(m_1 + m_2) = 1 \quad (133)$$

También es conveniente definir la siguiente relación entre las masas:

$$\frac{m_1}{m_2} = \xi \quad (134)$$

Y se puede definir una relación entre distancias como:

$$m_1 = 1 - \gamma \quad (135)$$

$$m_2 = \gamma \quad (136)$$

$$\gamma = \frac{1}{\xi} \quad (137)$$

Sea (θ, ψ) las coordenadas de m_3 en el sistema de coordenadas de los cuerpos, entonces el sistema de coordenadas lo podemos modelar de tal forma que en el momento $t = 0$ las masas m_1 y m_2 se encuentren en el eje θ en la abscisa $(-\gamma)$ y $(1 - \gamma)$. Entonces las coordenadas de las masas son [9][10]:

$$\begin{cases} \theta_1 = -\gamma \cos t \\ \psi_1 = -\gamma \sin t \end{cases} \quad (138)$$

$$\begin{cases} \theta_2 = (1 - \gamma) \cos t \\ \psi_2 = (1 - \gamma) \sin t \end{cases} \quad (139)$$

La distancia r_1 de m_3 a m_1 y la distancia r_2 de m_3 a m_2 esta dada por: [8][10]

$$r_1^2 = (\theta - \theta_1)^2 + (\psi - \psi_1)^2 \quad (140)$$

$$r_2^2 = (\theta - \theta_2)^2 + (\psi - \psi_2)^2 \quad (141)$$

Sea la energía potencial U , las ecuaciones diferenciales de los cuerpos son: [3] [9]

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -(1 - \gamma) \frac{\theta - \theta_1}{r_1^3} - \gamma \frac{\theta - \theta_2}{r_2^3} = - \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (142)$$

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -(1 - \gamma) \frac{\psi - \psi_1}{r_1^3} - \gamma \frac{\psi - \psi_2}{r_2^3} = - \frac{\partial U}{\partial \psi} \quad (143)$$

Si se introduce un sistema de coordenadas que gire alrededor de un centro de masa con velocidad angular constante las coordenadas de m_3 serían (α, β) en este nuevo sistema. Para realizar esta conversión se puede utilizar: [3]

$$\theta = \alpha \cos t - \beta \sin t \quad (144)$$

$$\psi = \alpha \sin t + \beta \cos t \quad (145)$$

Y las coordenadas de las masas m_1 y m_2 están definidas entonces por:

$$(\alpha_1, \beta_1) = (-\gamma, 0) \quad (146)$$

$$(\alpha_2, \beta_2) = (1 - \gamma, 0) \quad (147)$$

Y las distancias r_1 y r_2 están dadas por:

$$r_1^2 = (\alpha - \alpha_1)^2 + \beta^2 \quad (148)$$

$$r_2^2 = (\alpha - \alpha_2)^2 + \beta^2 \quad (149)$$

Entonces a partir de m_3 junto con sus coordenadas de (α, β) y la expresión (109) se puede reescribir en función de un astroide como:

$$m_s = (4r_c \cos^3 t, 4r_c \sin^3 t) \quad (150)$$

Donde m_s es la masa infinitamente menor a comparación con las demás y r_c su radio constante. Por tanto, podemos generar el siguiente sistema de evolutas:

$$m_1 = (4\sqrt{(\alpha - \alpha_1)^2 + \beta^2} \cos^3 t, 4\sqrt{(\alpha - \alpha_1)^2 + \beta^2} \sin^3 t) \quad (151)$$

$$m_2 = (4\sqrt{(\alpha - \alpha_2)^2 + \beta^2} \cos^3 t, 4\sqrt{(\alpha - \alpha_2)^2 + \beta^2} \sin^3 t) \quad (152)$$

$$m_3 = (4r \cos^3 t, 4r \sin^3 t) \quad (153)$$

La construcción de este sistema de evolutas se genera si y solo si se cumplan las condiciones iniciales y el centro de masa con velocidad angular constante tenga las coordenadas de m_3 (α, β) descrito en la figura 2.

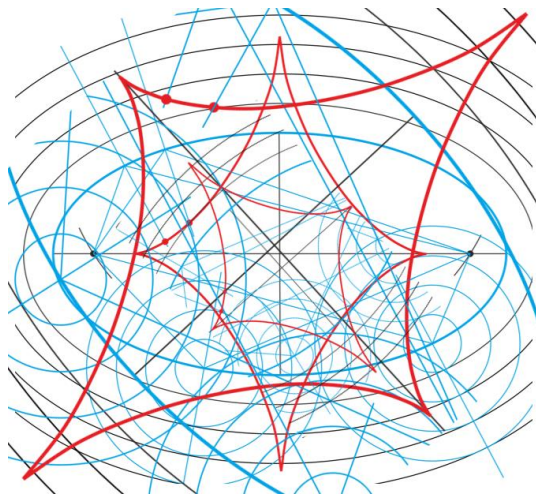


Fig. 2.- Principio del sistema de evolutas de 3 cuerpos.

VIII. CONCLUSIÓN

El Problema de los tres cuerpos es un problema abierto actualmente ya que posee una gran complejidad al intentar resolver las predicciones de los cuerpos o las partículas. Una forma de intentar abordarlo es buscar una analogía con el Problema de los dos cuerpos ya que este en condiciones iniciales adecuadas sus cuerpos terminan danzando periódicamente.

Uno de obstáculos del Problema de los tres cuerpos es cuando surge el caos en el sistema, es decir, el más mínimo cambio en las condiciones iniciales puede generar grandes consecuencias. Por ello, al modelar este problema por lo regular resultan órbitas caóticas que no se pueden controlar. Constantemente se han encontrado más y más órbitas de este estilo gracias a las supercomputadoras.

En este artículo se comienza a trabajar y describir un modelado a través de evolutas, en específico astroides, con el fin de intentar estabilizar las órbitas que generan los cuerpos. Pero al trabajar este tipo de sistema (151), (152) y (153) se deben poner ciertas condiciones iniciales fundamentales para su modelo, sin las condiciones iniciales tendería al caos inmediatamente. Debido a estas circunstancias, se presenta esta concepción para buscar alternativas al modelado de tres cuerpos y sus predicciones.

REFERENCIAS

- [1] V. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, 3rd ed. USA: Pearson, 2008.
- [2] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed. USA: Pearson, 2011.
- [3] L. D. Faddeev, *Mathematical Aspects of the Three Body Problem in the Quantum Scattering Theory*. USA: Daniel Davey & Co., 1965.
- [4] E. H. Lockwood, *A Book of Curves*. Cambridge, U.K.: University Press, 1961.
- [5] J. D. Lawrence, *A Catalog of Special Plane Curves*. USA: Dover Publications, 1972.
- [6] C. Escudero, E. Valencia, and Y. Poveda, *Centros de curvatura y circunferencia oscultriz de curvas en S^2* , Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia, 2013.
- [7] W. Koon, M. Lo, and J. Marsden, *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design*. USA: California Institute of Technology, 2006.
- [8] R. A. Broucke, *Periodic Orbits in the Restricted Three Body Problem with Earth-Moon Masses*. USA: California Institute of Technology, 1968.
- [9] M. Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. USA: Prentice Hall, 2023.
- [10] R. Fitzpatrick, *Circular Restricted Three-Body Problem*. USA: University of Texas, 2000.
- [11] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. 1687.

Propuesta de doce conjeturas sobre números primos.

Fernando Gustavo Isa Massa
Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Tucumán
San Miguel de Tucumán – Tucumán, Argentina
ferim74@yahoo.com.ar

Resumen- Las doce conjeturas en números primos que se presentan, así también como las conjeturas débiles; tienen como objetivo buscar colaboración en la comunidad científica internacional para aceptarlas o rechazarlas a cada una de ellas. Es de carácter no imperativo mediante una convocatoria a la comunidad científica internacional para tal fin. Las ocho primeras conjeturas no son débiles y su planteo y comprensión es por demás compleja; las cuatro conjeturas débiles tienen también una abstracción de mucha complejidad. Las conjeturas débiles vienen a traer una continuación de las conjeturas no débiles y con su continuidad llevan otros ejemplos de abstracción. Se plantean ejemplos para situaciones de la teoría de números que tienen una característica de las matemáticas puras, sin embargo, sus aplicaciones son por demás amplias; especialmente en criptografía y claves de seguridad.

Palabras Clave- conjetura en números primos, conjetura débil, teoría de números, claves de seguridad.

Abstract- The twelve conjectures on prime numbers that are presented, as well as the weak conjectures; They aim to seek collaboration in the international scientific community to accept or reject each of them. It is not imperative in nature, but; therefore, a call to the international scientific community for this purpose. The first eight conjectures are not weak, and their formulation and understanding are extremely complex; The four weak conjectures also have a very complex abstraction. Weak conjectures come to bring a continuation of non-weak conjectures and with their continuity they bring other examples of abstraction. Examples are presented for situations in number theory that have a characteristic of pure mathematics, however, their applications are very broad, especially in cryptography and security keys.

Keywords- conjecture on prime numbers, weak conjecture, number theory, security keys.

Mathematical Subject Classification: 11A41, 11N80, 11L20.

I. INTRODUCCIÓN

Las conjeturas son verdaderos retos matemáticos para la comunidad científica internacional, y su abstracción en teoremas, de ser aprobadas, o no en generan una amplia variedad de matemáticas para ello. La mayoría de las conjeturas demostradas en números primos [1] se concretaron con la introducción de variadas disciplinas de las matemáticas, esto ayudó al crecimiento de estas y a una mayor comprensión de la teoría de los números [2].

Euler estudió los números primos gemelos en "*Introductio in analysin infinitorum*" [3] mediante una conjetura que describe la serie infinita de los inversos de los números primos gemelos [4] como una serie convergente que fue cambiando hacia una mejor estructuración [5] y descripción de las propiedades [6] de los números primos.

Las aplicaciones en cómputo [7] para criptografía y claves de seguridad son inmensas y entre trabajos a destacar se encuentra el test que generaliza el denominado "pequeño teorema de Fermat" que describe finamente Hardy[8] sobre la primalidad determinista basado en un algoritmo que es procesado en tiempo polinomial [9] denominado "Test de primalidad AKS" [10] por las siglas de sus autores Manindra Agrawal, Neeraj Kayal y Nitin Saxena y otros trabajos de encriptación [10] y llave pública [11].

Para generalizar conjeturas en números primos es una tarea compleja que implica identificar patrones y formular hipótesis que se aplican a los números primos en general.

1. Observación de Patrones: Examinar los números primos y buscar patrones o regularidades.

2. Formulación de Hipótesis: Basándose en las observaciones, se formula una conjetura. Una conjetura es una afirmación que debe probarse para todos los números primos o para un subconjunto de ellos.

3. Prueba y Verificación: Verificar la conjetura con un gran número de ejemplos. Esto implica comprobar manualmente o usando programas de computadora.

4. Pruebas Matemáticas: Para transformar una conjetura en un teorema, se debe encontrar una prueba matemática rigurosa.

5. Generalización y Extensión: Una vez que una conjetura ha sido verificada para un gran número de casos y se ha probado matemáticamente, se puede intentar generalizarla o extenderla.

6. Publicación y Revisión por Pares: Compartir los resultados con la comunidad matemática para que otros puedan revisar el trabajo, buscar errores, y contribuir con nuevas ideas.

Esta investigación de doce conjeturas sobre números primos usa el criterio de: observación de patrones, formulación de hipótesis, prueba y verificación y publicación y revisión por pares.

Primera conjetura en primos [12]

$$P_i \text{ es primo, } P_1 + P_2 - 1 = P_n \\ P_i > 2$$

No necesariamente P_1 y P_2 son consecutivos

Corolario 1

Veamos algunos ejemplos en los que se cumple esta conjetura

Tabla I
Tabla de números primos hasta 1013 de Arizona University
<https://www2.cs.arizona.edu/icon/oddsends/primes.htm>

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997	1009	1013

La suma de dos primos da un número par, recordemos todos los primos son impares lo que acerca a la conclusión de que puede encontrarse otro primo al restarle uno y convertirse en impar.

$(P_1 + P_2) \bmod 2 = 0$, entonces es par.

$P_1 + P_2 - 1$ es impar, entonces se acerca a la propiedad necesaria pero no suficiente de que resulte en otro primo.

Al ser una conjetura no se pudo demostrar aún para los infinitos primos

Corolario 2

Veamos algunos ejemplos en los que se cumple esta conjetura

- 3 + 5 - 1 = 7 que es otro primo
- 5 + 7 - 1 = 11 otro primo
- 7 + 11 - 1 = 17 otro primo
- 11 + 13 - 1 = 23 otro primo
- 13 + 17 - 1 = 29 otro primo
- 13 + 509 - 1 = 821 otro primo
- 541 + 337 - 1 = 877 otro primo
- 347 + 223 - 1 = 569 otro primo
- 317 + 367 - 1 = 683 otro primo
- 271 + 229 - 1 = 499 otro primo
- 127 + 131 - 1 = 257 otro primo
- 103 + 149 - 1 = 251 otro primo
- 1 + 577 - 1 = 997 otro primo
- 331 + 379 - 1 = 709 otro primo
- 103 + 631 - 1 = 733 otro primo
- 421 + 463 - 1 = 863 otro primo
- 13 + 811 - 1 = 823 otro primo
- 431 + 433 - 1 = 863 otro primo
- 457 + 23 - 1 = 479 otro primo
- 907 + 5 - 1 = 911 otro primo
- 823 + 31 - 1 = 853 otro primo
- 727 + 47 - 1 = 773 otro primo
- 677 + 211 - 1 = 887 otro primo
- 509 + 313 - 1 = 821 otro primo

Segunda conjetura en primos

$P_n = P_1 + P_2 - 10^{(Longitud(P_1 \vee P_2) - 1) - 1}$, P_i es primo

Longitud es la cantidad de dígitos de P_i
No necesariamente P_1 y P_2 consecutivos

Corolario 3

Tabla II
Tabla de números primos hasta 2053 de Arizona University
<https://www2.cs.arizona.edu/icon/oddsends/primes.htm>

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997	1009	1013
1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151
1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217	1223
1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291
1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1373	1379
1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447	1451
1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583
1597	1601	1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657
1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733
1741	1747	1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811
1823	1831	1847	1861	1867	1871	1873	1877	1879	1889
1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987
1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029	2039	2053

Corolario 4

- 101 + 103 - 10² - 1 = 103 otro primo
- 677 + 797 - 10² - 1 = 1373 otro primo
- 109 + 131 - 10² - 1 = 139 otro primo
- 827 + 971 - 10² - 1 = 1697 otro primo
- 23 + 31 - 10¹ - 1 = 43 otro primo
- 379 + 383 - 10² - 1 = 661 otro primo
- 7 + 2 - 10⁰ - 1 = 7 otro primo
- 5 + 2 - 10⁰ - 1 = 5 otro primo
- 97 + 11 - 10¹ - 1 = 97 otro primo
- 3 + 2 - 10⁰ - 1 = 3 otro primo
- 137 + 157 - 10¹ - 1 = 193 otro primo
- 953 + 971 - 10² - 1 = 1823 otro primo
- 947 + 811 - 10² - 1 = 1657 otro primo
- 1217 + 1033 - 10³ - 1 = 1249 otro primo
- 1877 + 1097 - 10³ - 1 = 1973 otro primo
- 311 + 337 - 10² - 1 = 547 otro primo
- 887 + 757 - 10² - 1 = 1543 otro primo

Tercera conjetura en primos

$P_1 - P_2 - 1 = P_n$, P_i es primo. $P_i > 2$
No necesariamente P_1 y P_2 consecutivos

Corolario 5

- 7 - 3 - 1 = 3
- 11 - 5 - 1 = 5
- 17 - 13 - 1 = 3
- 31 - 11 - 1 = 19
- 283 - 179 - 1 = 103
- 643 - 103 - 1 = 139
- 11 - 3 - 1 = 7 otro primo
- 19 - 7 - 1 = 11
- 41 - 11 - 1 = 29
- 101 - 71 - 1 = 29
- 113 - 53 - 1 = 59
- 173 - 71 - 1 = 101

$$\begin{aligned} 211 - 19 - 1 &= 191 \\ 317 - 227 - 1 &= 89 \\ 439 - 307 - 1 &= 131 \\ 601 - 593 - 1 &= 7 \\ 743 - 293 - 1 &= 449 \\ 761 - 401 - 1 &= 359 \\ 907 - 757 - 1 &= 149 \end{aligned}$$

Cuarta conjetura en primos

Si $E_i \bmod 2 = 0 \wedge P_i > 2$
Entonces $P_1 - P_2 = E_i, E_i$ es par, P_i es primo
No necesariamente P_1 y P_2 consecutivos

Corolario 6

Se puede deducir una cercanía metodológica con la conjetura de Goldbach [13] que indica que: un número par se deduce de la suma de dos primos mayores a 2 [14].

Corolario 7

$$\begin{aligned} 5 - 3 &= 2 \\ 7 - 3 &= 4 \\ 7 - 5 &= 2 \\ 11 - 5 &= 6 \\ 23 - 11 &= 12 \\ 31 - 27 &= 4 \\ 101 - 23 &= 78 \end{aligned}$$

De la tabla saquemos algunos ejemplos para acercar solución a la conjetura

$$\begin{aligned} 5 - 3 &= 2 \\ 421 - 109 &= 12 \\ 809 - 787 &= 22 \\ 541 - 191 &= 350 \\ 733 - 401 &= 332 \\ 509 - 503 &= 6 \\ 653 - 503 &= 150 \\ 271 - 173 &= 98 \\ 89 - 11 &= 78 \\ 37 - 23 &= 14 \end{aligned}$$

Quinta conjetura en primos

Si $((E_1 \bmod 2 = 0) \wedge (E_2 \bmod 2 = 0))$
Entonces:
 $\left[\left(\frac{(E_1 + E_2)}{2} \right) + (E_i - 1 \vee E_1 + 1) \right] + (E_2 - 1 \vee E_2 + 1) =$
 P_i, P_i es primo, E_i es entero
No necesariamente E_1 y E_2 consecutivos

Corolario 8

$$\begin{aligned} \frac{2 + 4}{2} + 1 + 3 &= 7 \\ \frac{6 + 8}{2} + 5 + 7 &= 19 \\ \frac{60 + 62}{2} + 59 + 61 &= 181 \\ \frac{292 + 294}{2} + 291 + 293 &= 877 \\ \frac{302 + 304}{2} + 301 + 303 &= 907 \\ \frac{604 + 610}{2} + 603 + 613 &= 1823 \\ \frac{508 + 510}{2} + 507 + 515 &= 1531 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{10 + 12}{2} + 9 + 11 &= 31 \\ \frac{102 + 104}{2} + 103 + 105 &= 311 \\ \frac{454 + 456}{2} + 451 + 455 &= 1361 \end{aligned}$$

Sexta conjetura en primos

$P_1 + P_2 = E_1 \cdot P_3$
 P_i es primo
 E_i es primo o entero
No necesariamente P_1 y P_2 son consecutivos

Corolario 9

$$\begin{aligned} (53 + 151) &= 204 = (17 \cdot 12) \\ (239 + 317) &= 556 = (139 \cdot 4) \\ (127 + 1597) &= 1724 = (431 \cdot 4) \\ (11 + 1163) &= 1174 = (587 \cdot 2) \\ (653 + 1009) &= 1662 = (277 \cdot 6) \end{aligned}$$

Séptima conjetura en números primos

$P_1 + P_2 = \frac{E_1}{P_3}$
 P_i es primo
 E_i es entero
No necesariamente P_1 y P_2 consecutivos

Corolario 10

$$\begin{aligned} (7 + 3) &= 10 = \frac{30}{3} \\ (11 + 19) &= 30 = \frac{150}{5} \\ (127 + 1009) &= 882 = \frac{9702}{11} \\ (97 + 3) &= 100 = \frac{500}{5} \\ (1861 + 7) &= 1868 = \frac{35492}{19} \end{aligned}$$

Octava conjetura en números primos

$\frac{(P_1 - P_2)}{2} = E_1 + P_3$
 P_i es primo
 E_i es entero
No necesariamente P_1 y P_2 son consecutivos

Corolario 11

$$\begin{aligned} \frac{11 - 5}{2} &= 3 = 2 + 1 \\ \frac{7 - 3}{2} &= 2 = 2 + 0 \\ \frac{1831 - 317}{2} &= 757 = 53 + 704 \\ \frac{1597 - 929}{2} &= 334 = 307 + 27 \\ \frac{79 - 71}{2} &= 4 = 2 + 2 \\ \frac{523 - 3}{2} &= 260 = 179 + 81 \end{aligned}$$

Primera conjetura débil de primos

Si $E_1 \bmod 2 = 0$
Entonces $(P_1 + P_2) - (P_3 + P_4) - 2 = E_1$

P_i es primo
 E_1 es par
 No necesariamente P_1, P_2, P_3 y P_4 consecutivos
 Es un caso especial de la primera, tercera y cuarta conjetura en primos propuesta

Corolario 12

$$\begin{aligned} (1429 + 1753) - (1061 + 1741) - 2 &= 378 \\ (1009 + 1031) - (97 + 1741) - 2 &= 200 \\ (17 + 101) - (59 + 13) - 2 &= 44 \\ (919 + 797) - (421 + 11) - 2 &= 1282 \\ (1319 + 1259) - (1583 + 179) - 2 &= 814 \\ (1259 + 1277) - (1033 + 1087) - 2 &= 414 \\ (653 + 439) - (281 + 5) - 2 &= 804 \end{aligned}$$

Segunda conjetura débil de primos

Si $E_1 \text{ mod } 2 = 0 \wedge n \text{ mod } 2 = 0$

Entonces:

$$(P_1 + P_2 + \dots + P_n) - 10^{(\text{Longitud}(P_i)-1)} - \frac{n}{2} = E_1$$

P_1 es primo

E_1 es par

Longitud es la cantidad de dígitos de P_i

No necesariamente P_i consecutiva

Es una derivación de la segunda conjetura en primos

Corolario 13

$$\begin{aligned} (1823 + 1031 + 1181 + 1867) - (10^3 - 2) &= 4900 \\ (1117 + 1789 + 1657 + 1997) - (10^3 - 2) &= 5468 \\ (7 + 11 + 677 + 967) - (10^3 - 2) &= 660 \\ (79 + 71 + 191 + 773) - (10^3 - 2) &= 112 \\ (7543 + 1657 + 1861 + 773) - (10^3 - 2) &= 10832 \end{aligned}$$

Tercera conjetura débil de primos

Si $n \text{ mod } 2 = 0$

Entonces $(P_1 - P_2 - \dots - P_n) - (n - 1) = P_k$

P_i es primo

N es par

No necesariamente P_i consecutiva

Derivación de la tercera conjetura en primos

Corolario 14

$$\begin{aligned} (1831 - 1013 - 101 - 5) - 3 &= 709 \\ (1973 - 1171 - 271 - 89) - 3 &= 439 \\ (1949 - 1039 - 101 - 97 - 73 - 3) - 5 &= 631 \\ (1279 - 1009 - 67 - 53 - 19 - 13) - 5 &= 113 \\ (929 - 523 - 181 - 71 - 43 - 3) - 5 &= 103 \end{aligned}$$

Cuarta conjetura débil de primos

$$(P_1 + P_2) - (P_3 - P_4) - 3 = P_n$$

P_i es primo

No necesariamente P_1, P_2, P_3 y P_4 son consecutivos

Derivada de la primera y tercera conjetura en primos

Conjetura 15

$$\begin{aligned} (1291 + 1319) - (1009 - 179) - 3 &= 1777 \\ (1021 + 1669) - (1823 - 73) - 3 &= 937 \\ (907 + 751) - (431 - 13) - 3 &= 1237 \\ (269 + 167) - (97 - 23) - 3 &= 359 \\ (1153 + 1439) - (1039 - 173) - 3 &= 1723 \end{aligned}$$

II. CONCLUSIONES

Los tiempos de la era de la ciencia y tecnología nos permiten indagar en nuevos paradigmas y reemplazarlos por los antiguos; estas nuevas conjeturas en números primos tienen la ventaja de ser comprensibles al enunciado; pero su demostración debería de ser altamente compleja. Dejo a la comunidad científico internacional su demostración en teorema o rechazarlas en caso contrario.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia y amigos, Marcos Fajardo Rendon, Ing. Claudio Fernández, AUS Damián García Pascualini, AUS Adrián Murua, Ing. Gustavo Carrasco, C. Dr. Arturo López, C. Dr. Adolfo Rodríguez, Prof. María Leonor Gómez Llanos, Ing. Fanny Herrera, Dr. Ing. Jorge Perera, Luis Sacaba, Ing. Ricardo Adra, Prof. Carlos Córdoba, Prof. Diego Di Pietro, amigos de acción católica, sacerdote Miguel Galland.

REFERENCIAS

- [1] R. Nickerson, *Mathematical Reasoning Patterns, Problems, Conjectures, and Proofs*, 1st ed. New York, USA: Psychology Press, 2009.
- [2] S. Kanemitsu and China Japan Seminar on Number Theory, *Number Theory Arithmetic in Shangri-La: Proceedings of the 6th China-Japan Seminar, Shanghai, China, 15-17 August 2011*. Singapore: World Scientific, 2013.
- [3] L. Euler, *Introduction in analysis infinitorum. Tomus Primus [Introduction to the Analysis of the Infinite. Volume I]*. Lausannae et Genevae: Marcum-Michaellem Bousquet & Socios, 1748.
- [4] M. Agrawal, N. Kayal, and N. Saxena, *PRIMES is in P*, Ann. Math., vol. 160, no. 2, pp. 781-793, 2004.
- [5] A. Granville, *Primes in intervals of bounded length*, in Number Theory for the Millennium, I, pp. 181-202. A K Peters, 2008.
- [6] A. Granville, *Harald Cramér and the distribution of prime numbers*, Scandinavian Actuarial Journal, vol. 1, pp. 12-28, 1995.
- [7] R. Crandall and C. Pomerance, *Prime Numbers: A Computational Perspective*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [8] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Number*. Oxford University Press, 1979.
- [9] A. Cobham, *The intrinsic computational difficulty of functions*, in Proceedings of the 1964 Congress for Logic, Methodology, and the Philosophy of Science, Paris, France, 23-25 July 1964, pp. 24-30.
- [10] U. Maurer, C. Portmann, and G. Rito, *Annual International Conference on the Theory and Applications of Cryptographic Techniques*, in Springer International Publishing, 2022, pp. 644-673.
- [11] G. Simmons and M. Norris, *Preliminary comments on the M.I.T public key cryptosystem*, Cryptologia, vol. 1, no. 4, pp. 406-414, Oct. 1977.
- [12] T. Estermann, *Introduction to Modern Prime Number Theory*, No. 41. Cambridge University Press, 2011.
- [13] H. A. Helfgott, *Major arcs for Goldbach's theorem*, arXiv, 2013, arXiv:1305.2897.
- [14] H. A. Helfgott, *Minor arcs for Goldbach's problem*, arXiv, 2012, arXiv:1205.5252.

Gm Sharp Prelude, a musical composition based on a mathematical aided - computer methodology.

Francisco Guillermo Herrera Armendia

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

harmendia@gmail.com

Abstract- An intriguing exploration intertwining pseudorandom number generation and music composition, leveraging mathematical-computer methods and principles of harmony, is detailed in the following pages. I crafted a prelude using a specific mathematical-computer methodology, guided by melodic and harmonic rules, and drawing upon my piano skills. The algorithm presented is both practical and straightforward for programming. Initially, I meticulously verified the algorithm's effectiveness by methodically following the example provided by its author. Encouraged by its reliability, I converted the generated values into decimal digits to select suitable starting points for musical composition. These values were then reordered to align with melodic and harmonic conventions, resulting in the formation of three distinct motifs. The remainder of the composition was shaped by my piano performance. This experience underscored the profound synergy between mathematics, music, and computing, prompting reflection on their collaborative potential.

Keywords- Pseudorandomness, Blum – Blum – Shub Method, Musical Composition, Gm Sharp Prelude.

Zusammenfassung - Auf den nächsten Seiten wird über eine interessante Erfahrung im Zusammenhang mit der Generierung von Pseudozufallszahlen und der Komposition von Musik berichtet, die es ermöglicht, mathematisch unterstützte Computermethoden und Harmonielehre zu kombinieren. Ich komponierte ein Präludium unter Anwendung einer bestimmten mathematisch unterstützten Computermethode, wobei ich auch die melodischen und harmonischen Regeln sowie meine Klavierfähigkeiten verwendete. Der hier vorgestellte Algorithmus ist sehr nützlich und relativ einfach zu programmieren. Zunächst habe ich das vom Autor des Algorithmus vorgeschlagene Beispiel Schritt für Schritt überprüft und seine Wirksamkeit bewiesen. Darauf basierend habe ich beschlossen, die generierten Werte in Dezimalzahlen umzuwandeln, um die geeigneten Werte auszuwählen und mit der Generierung der musikalischen Komposition zu beginnen. Es war notwendig, die von mir gewählten Werte neu anordnen, um sie mit melodischen und harmonischen Regeln in Beziehung zu setzen. Mit dem von mir befolgten Verfahren wurden drei Motive gebildet. Den Rest dieses Musikwerks habe ich mithilfe meiner Klavierkenntnisse fertiggestellt. Diese Erfahrung hat mich über die Nützlichkeit der Arbeit mit Mathematik, Musik und Computern nachdenken lassen.

Schlüsselwörter - Pseudozufällig; Blum-Blum-Shub-Methode; musikalische Komposition; Präludium in gis-Moll.

резюме темы - следующих страницах сообщается об интересном опыте, связанном с генерацией псевдослучайных чисел и составлением музыки, который позволяет объединить математически обоснованные компьютерные методы и гармонию. Я сочинил прелюдию, используя специальный математический компьютерный

метод, а также правила мелодии и гармонии, а также свои навыки игры на фортепиано. Представленный здесь алгоритм очень полезен и относительно прост в программировании. Исходя из этого, я решил преобразовать сгенерированные значения в десятичные, чтобы выбрать подходящие значения и приступить к генерации музыкальной композиции. Необходимо было переставить выбранные мною значения, чтобы связать их с мелодическими и гармоническими правилами. Используя процедуру, которой я следовал, были сформированы три мотива. Остальную часть этого музыкального произведения я завершил, используя свои навыки игры на фортепиано. Этот опыт заставил меня задуматься о пользе работы с математикой, музыкой и компьютерами.

Ключевые слова - Псевдослучайный; метод Блум-Блум-Шаб; прелюдия соль-диез минор.

Mathematical Subject Classification: 68Uxx.

I. INTRODUCTION.

The intersection of abstract scientific operations and music composition has been explored through various methodologies, such as Guido's Method, Euclid's Method [1], programming languages dedicated to music [2], and the nuanced balance between subjective and objective decision-making. Techniques involving randomness and pseudorandomness [3], chaos theory, determinism, combinatorics, atonality, composing functions, and the manipulation of musical materials [4] have also played pivotal roles. Additionally, stochastic techniques [5], probability theory [6], information theory, and the mathematics of expectation [7] have contributed to shaping musical forms through unpredictability and structured methodologies like Monte Carlo Methods and Markov chains [8]. The integration of chance elements into composition, alongside learning processes and the connectionism of musical knowledge, has further enriched this exploration. Gareth elucidates the practical applications of these methodologies.

Having devoted considerable time to music composition, I have been deeply influenced by Chopin's legacy [10]. Recently, I decided to combine a specific computer-aided composition method [11] with harmony theory [12] to create a prelude. The motifs within this musical work were selected using a tailored algorithm, and the entire composition was completed using harmony principles and my creative musical instincts.

II. MATHEMATICAL AIDED – COMPUTER METHOD APPLIED TO MUSICAL COMPOSITION.

Pseudorandomness method is classified in randomness category [13] as well as linear congruential method [14]. Gareth deals about the application to music composition of different mathematical methods (see Chapter 9 in [12]).

First one, includes two algorithms: a) polynomials, which can express any number N as a polynomial of integers in base b : $A8$ in base 16 could be expanded as: $A8 = (8 * 16^0) + (10 * 16^1)$.

They also include techniques as the infinite polynomial expansion, the cyclic polynomial and the infinitely non cyclic sequence of digits. b) converting polynomials to digit sequences which deals with some radix base b . Let f be a fraction: $f = a_1b^{-1} + a_2b^{-2} + \dots + a_nb^{-n}$. All values of a_i must satisfy $0 \leq a_i < b$. Thus, we obtain the product which consist to multiply f by b , so that I can shift the first fractional digit a_i out of the fraction and into the units place, as this: $bf = a_1 + a_2b^{-1} + a_3b^{-2} + \dots + a_nb^{-n+1}$, so I isolated a_i in the unit place.

Let $f = 0.7634$ and let $b = 10$, then:

$$\begin{aligned} 0.7634 * 10 &= 7.634 \\ 7.634 * 10 &= 76.34 \\ 76.34 * 10 &= 763.4 \\ 763.4 * 10 &= 7634 \end{aligned}$$

Thus, I have obtained the digits 7, 6, 3 and 4, once I applied the algorithm which consists in repeatedly multiplying the result of the previous step by b , pushing the next digit out of the polynomial's fractional value into the unit place. This is a very useful technique which allows us to extract successive digits to form random number sequences. In order to use the linear congruential method, it was introduced by D. H. Lehmer in 1948 [12]. Here, I have to consider the next equation:

$$x_{n+1} = ((ax_n + b))_c, n \geq 0$$

So I must translate “ x is reduced module n ” when I read $((x))_n$. This equation shows the linear congruential method which allows me to generate random numbers. It is linear because the $ax + b$ part of this mathematical expression describes a straight line that intersects the y -axis at offset b with slope a . In other words, it is shown the fact that arithmetic module is being used when I notice congruence like a condition of equivalence between two integers module some other integer. It is possible to reach the value of c while the output grows, based on successive computations of x . The next and new value of x is effectively reset to $x - c$ by the modulus operations when c is exceeded. As an example, I can generate an ascending straight line at 45° slope, if $a = b = x_0 = 1 \wedge c \rightarrow 0$. To obtain random generated numbers depends on assignment of other values to a, b, c , and x_0 .

III. THE SPECIFIC METHODOLOGY. PSEUDORANDOMNESS.

John von Neumann worked hard designing computer algorithms related to randomness. However, he noticed in a timely way, that computers can only execute methods which are strictly algorithmic, rules out anything that depends upon

unknowns, so they cannot be a source of true random sequences by programming development. A sequence is perfectly random if it never repeats its choices in whole or in part, applying the principle of independence. However, in practice, a sequence does not have to be perfectly random to apply in musical composition. I only need to be random enough, because randomness is essentially an empirical criterion that we use to characterize processes we can't predict. So applying numerical techniques, computers can generate number sequences which are random enough and they allow us to compose music. All computer – generated sequences eventually repeat, so they are pseudorandom numbers. Specifically we used the algorithm that Bishop suggests [11], named Blum – Blum – Shub Pseudorandom Bit Generator to produce pseudorandom numbers or bitstream (This method includes 4 relatively simple steps). These are the ones we followed:

- 1) We picked out two strong primes numbers p and q , both of them congruent to 3 module 4, [14] After this we formed $n = pq$ [15]. Then we chose j as a positive integer not exceeding $\log_2(\log_2 n)$ [16].
- 2) We selected a random integer seed s such that: a) $2 \leq s < n$; b) s and n must be relatively prime. So computing $x_0 = \ln r$ of s^2 module n [15].
- 3) We repeated previous steps such as is suggested: a) $x_i = \ln r$ of $(x_{i-1})^2$ module n . b) Let z_i be the j least significant bits of x_i .
- 4) We got an output sequence, as: z_1, z_2, \dots, z_n .

First of all, we proved the algorithm using the same values given by Bishop:

$p = 11,351$; $q = 11,987$; $n = pq = 136'064,437$; j was established as 4, the largest integer not exceeding $\log_2(\log_2 n)$, this is: 4.75594. $s = 80'331,757$. Then, a stream of 2 blocks is generated, each of bit length 4, where $z_1 = 47497112 \equiv 8 \equiv 1000_{base 2} (mod 2^4)$ the 4 least significant bits of x_1 . For $z_2 = 69993144 \equiv 8 \equiv 1000_{base 2} (mod 2^4)$ choosing the 4 least significant bits of x_2 . So finally, is obtained: 10001000.

Keeping on working in this way, it is possible to generate a 100 blocks stream (recommended by Bishop) in which the final result is given in four bit – groups of one hundred sequence, that we translate into decimal digits to be analyzed in terms of harmony theory to compose the prelude. They are:

Figure 1. Results obtained by applying Blum – Blum – Shub Pseudorandom Bit Generator.

8	8	8	15	14	5	13	1	0	0	0	8	12	13
1	3	6	10	14	6	6	0	11	3	8	10	12	10
0	13	14	4	7	15	10	0	11	9	14	9	12	4
3	8	5	8	2	9	4	5	15	1	5	12	5	0
6	11	9	1	0	5	3	12	7	3	5	7	0	15

2	15	15	12	6	1	3	14	7	1	15	2	15	12
---	----	----	----	---	---	---	----	---	---	----	---	----	----

11	3	15	15	14	10	15	9	7	7	2	4	9	2
12	0												

IV. GM SHARP PRELUDE.

In the first moment, I had to relate one musical sound to one decimal digit. So I have:

0 = C; 1 = C Sharp or D Flat; 2 = D; 3 = D Sharp or E Flat; 4 = E; 5 = F; 6 = F Sharp or G Flat; 7 = G; 8 = G Sharp or A Flat; 9 = A; 10 = A Sharp or B Flat; 11 = B.

For this time we decided to relate numbers 12, 13, 14 and 15 as separated digit corresponding sounds as mentioned before, for instance, 12 is separated as 1 = C Sharp or D Flat, and 2 = D.

After this, it is obviously that if we try to write music using the numbers in an orderly way we will not obtain any melodic music sequence, for instance using part of the first row numbers:

8	8	8	15	14	5	13	1	0	0
---	---	---	----	----	---	----	---	---	---

and assigning sounds as we proposed before: G#, G#, G#, C#, F; C#, E, F, C#, D#, C, C, etc., will not have a melodic theoretical relation (in prelude terms).

So we analyzed carefully the board, looking for a first harmonic sequence:

Figure 2. The digits 3, 8, 11, 1, 0, (digits 1 and 0 putted together as 10) and 3, keeping each other a harmonious relationship:

8	8	8	15	14	5	13	1	0	0	0	8	12	13
1	3	6	10	14	6	6	0	11	3	8	10	12	10
0	1 3	14	4	7	15	10	0	11	9	14	9	12	4
3	8	5	8	2	9	4	5	15	1	5	12	5	0
6	11	9	1	0	5	3	12	7	3	5	7	0	15
2	1 5	15	12	6	1	3	14	7	1	15	2	15	12
1 1	3	15	15	14	10	15	9	7	7	2	4	9	2
1 2	0												

These digit values can be translated into music notes, as next figure shows:

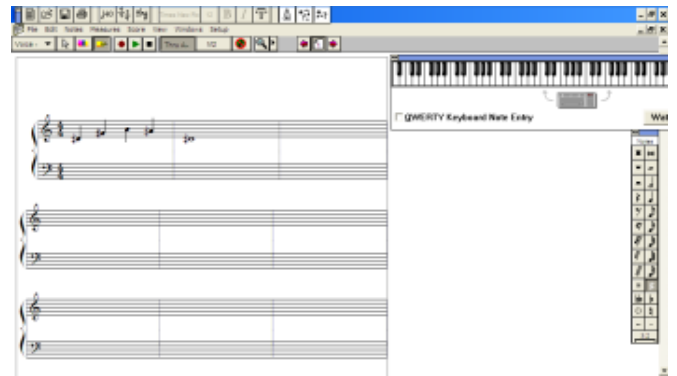


Figure 3. Musical notes of the digits obtained.

Keeping on analyzing the board, I looked for others melodic relations:

Figure 4. Second digits set which has a harmonious relationship, 6, 11, 3, 8.

8	8	8	15	14	5	13	1	0	0	0	8	12	13
1	3	6	10	14	6	6	0	11	3	8	10	12	10
0	13	14	4	7	15	10	0	11	9	14	9	12	4
3	8	5	8	2	9	4	5	15	1	5	12	5	0
6	11	9	1	0	5	3	12	7	3	5	7	0	15
2	15	15	12	6	1	3	14	7	1	15	2	15	12
11	3	15	15	14	10	15	9	7	7	2	4	9	2
12	0												

The notes generated are showed

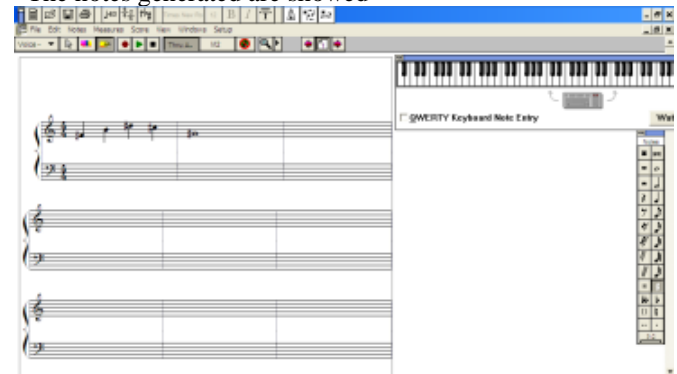


Figure 5. Musical notes corresponding to second digits set.

Here I decided to include C# in the music sheet for melodic purposes. Another melodic sequence was found:

Figure 6. Third digit set. Here we have: G#, F#, F#, C#, D#, B, D#.

8	8	8	15	14	5	13	1	0	0	0	8	12	13
1	3	6	10	14	6	6	0	11	3	8	10	12	10
0	13	14	4	7	15	10	0	11	9	14	9	12	4
3	8	5	8	2	9	4	5	15	1	5	12	5	0
6	11	9	1	0	5	3	12	7	3	5	7	0	15
2	15	15	12	6	1	3	14	7	1	15	2	15	12
11	3	15	15	14	10	15	9	7	7	2	4	9	2
12	0												

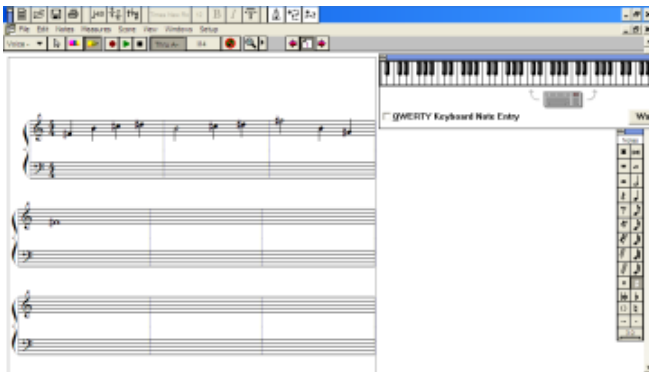


Figure 7. Music sheet shows notes corresponding to third digits set, re – ordered and including other ones.

The previous sequence was re-ordered as shown in figure 7. In first bar, B is added; in second one, C#; in third one, B and in last bar, F#. (also for melodic purposes). With these ideas I began to compose the prelude, bringing in mind the Blum – Blum – Shub Pseudorandom Bit Generator algorithm results and harmony rules. This is the beginning of the composition:

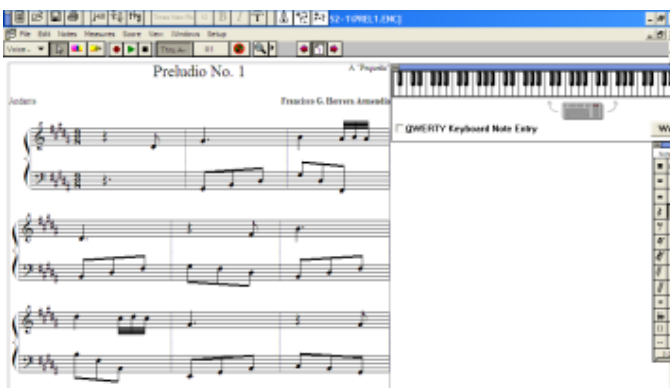


Figure 8. Bars 1 to 9 prelude's first motif.

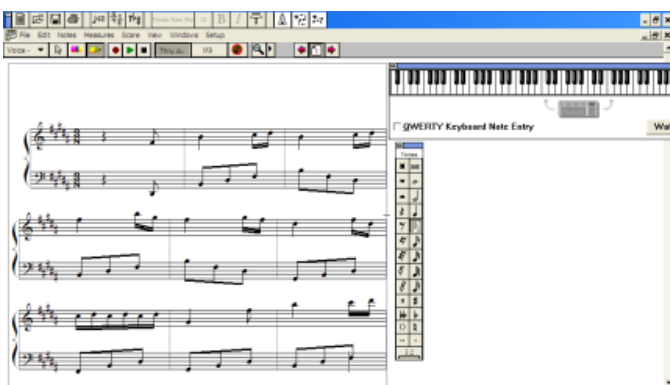


Figure 9. Bars 39 to 47 which shows a second motif of the prelude.

This second motif of the composition really was a variation inspired in the first musical idea.

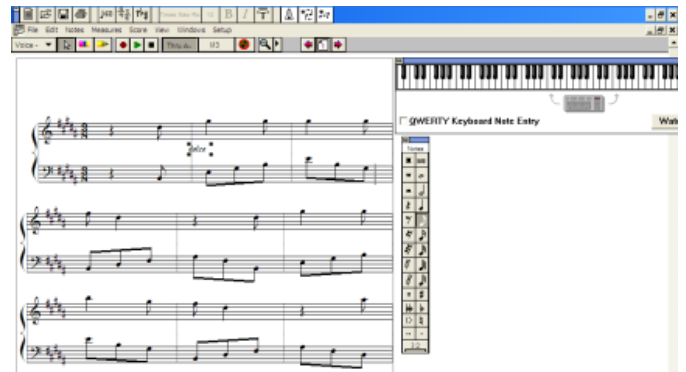


Figure 10. Third motif. As in the second one, there is a musical variation. Bars 71 to 79.

Whole prelude was composed following the Blum – Blum – Shub Pseudorandom Bit Generator algorithm, and completed through applying melodic and harmonic musical rules and my musical abilities.

The composition has 107 bars in Gm Sharp. This musical key was chosen following the algorithm results, $\frac{3}{4}$ performance time and andante tempo. The melody has a sweet, gloomy and sad, at the same time, touch. The prelude form I chose is due to this form having a pianistic characteristic and it has a short motif, (XIX century prelude). Chopin, Debussy and Rachmaninov were representative composers in this musical form.

V. CONCLUSIONS.

Sometimes it is not too easy to compose music, because musical ideas do not emerge as I would desire. It is well known that music and mathematics are too closed and it is possible to have recourse to this. So it was a very interesting and scientific – artistic experience which contributes a little bit more with these knowledge areas. However, the next points are the result of this interdisciplinary scientific work.

- The algorithm is too useful and relatively easy.
- The complete and ordered bit sequence was not useful to produce music.
- I had to re-ordered the chosen digits to obtain a melodic sequence.
- I had to complete the composition using my musical abilities, but the first motif was extracted using the mathematical aided – computer algorithm.

REFERENCES.

- [1] T. Nagell, *Number Theory*, Chelsea Publishing Company, New York, 1981.
- [2] M. Müller, *Information Retrieval for Music and Motion*, Springer Verlag, Berlin, 2002.
- [3] N. Longford, *Random Coefficient Models*, Oxford Science Publications and Clarendon Press, New York, 1995.
- [4] G. Mazzola, *Geometrie der Töne. Elemente der Mathematischen Musiktheorie*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

- [5] S. Resnick, *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhäuser Verlag, Berlin, 2002.
- [6] D. Temperley, *Music and Probability*, The MIT Press, Cambridge, 2007.
- [7] M. Bean, *Probability: The Science of Uncertainty*, American Mathematical Society, Providence, 2009.
- [8] H. Paitgen, H. Jürgens, and D. Saupe, *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*, Springer Verlag, Berlin, 2004.
- [9] C. Pickover, *Computers, Pattern, Chaos and Beauty. Graphics from an Unseen World*, Dover Publications Inc., New York, 2001.
- [10] F. Herrera, *Präludium 1, gis-Moll. Musikkompositionen für Klavier*, Mexiko, 1986.
- [11] D. Bishop, *Introduction to Cryptography with Java Applets*, Science Editions, Sudbury, MA, 2003.
- [12] L. Gereth, *Musimathics. Vol. 1. The Mathematical Foundations of Music*, The MIT Press, Cambridge, MA, 2006.
- [13] B. Clegg, *Everyday Chaos. The Mathematics of Unpredictability, from the Weather to the Stock Market*, The MIT Press, Cambridge, MA, 2010.
- [14] R. Devaney, *Chaos, Fractals and Dynamics. Computer Experiments in Mathematics*, Addison and Wesley, Reading, MA, 1990.
- [15] W. LeVeque, *Elementary Theory of Numbers*, Dover Publications Inc., New York, 1990.
- [16] P. Bachman, *Niedere Zahlentheorie*, Chelsea Publishing Company, New York, 1968.
- [17] N. Bourbaki, *Commutative Algebra*, Springer Verlag, Berlin, 1991.